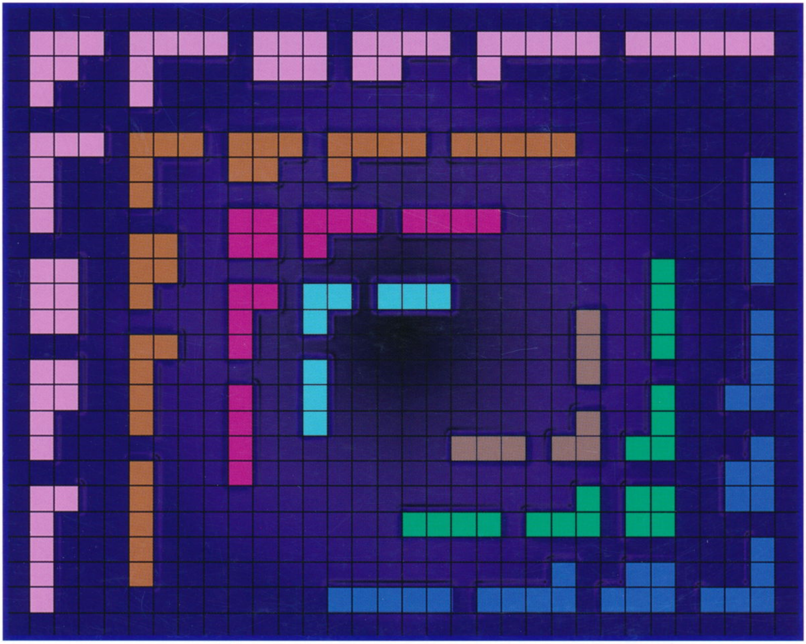
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2007年1月1日発行　第45巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2007

特集　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
イメージ力を鍛える



No.523

サイエンス社

Springer
the language of science

springer.jp

※価格は全て税別



現代物理学の創造
仁科記念講演録集　仁科記念財団 編

収録著者…第1巻　朝永振一郎・青野雄一郎・菅 義夫・小田 稔・鳩山道夫・湯川秀樹
第2巻　ハイゼンベルク・後藤英一・朝永振一郎・湯川秀樹・藤岡由夫・小田 稔・戸田盛和・長谷川博一・中嶋貞雄・本庶 佑
第3巻　南部陽一郎・西川哲治・菊池 健・木越邦彦・近藤 淳・外村 彰・伊達宗行・西島和彦

新刊

各巻A5 本体3,000円 ▶第1巻 322頁 ISBN4-431-71221-6 ▶第2巻 270頁 ISBN4-431-71222-4 ▶第3巻 275頁 ISBN4-431-71223-2

超関数を発明したフランスのフィールズ・メダリストによる長編自伝，全2巻

闘いの世紀を生きた数学者
ローラン・シュヴァルツ自伝



近刊

L.シュヴァルツ 著　彌永健一 訳
▶四六判上製 上巻約448頁 ISBN4-431-71228-3
下巻約512頁 ISBN4-431-71233-X

シュヴァルツが受賞したフィールズ・メダル.（フランスの最高学府エコール・ポリテクニークにて撮影）

Rの基礎とプログラミング技法
U.リゲス 著　石田基広 訳
▶B5変 258頁 本体3,500円 ISBN4-431-71218-6
Rのインストール方法から起動，プログラミング言語としての基礎が身につく.

情報理論と符号理論
G.A.ジョーンズ／J.M.ジョーンズ 著
一樂重雄／河原正治／河原雅子 訳
▶A5 207頁 本体3,000円 ISBN4-431-71216-X
数学的にも厳密に書かれた情報科学入門としての講義テキスト.

暗号理論のための格子の数学
D.ミッチアンチオ／S.ゴールドヴァッサー 著　林 彬 訳
▶A5 244頁 本体3,500円 ISBN4-431-71227-5
著者のゴールドヴァッサー（MIT教授）は，ゲーデル賞を史上初めて2度受賞.

代数幾何学講義　シュプリンガー数学クラシックス 第19巻
D.マンフォード 著　前田博信 訳
▶A5上製 予価4,500円 ISBN4-431-71231-3 近刊
"Red Book"の通称で有名なマンフォードのレクチャーノートをついに邦訳.

数学の最先端　21世紀への挑戦　全6巻いよいよ完結
日本語版監修 砂田利一 ▶各巻A5 本体2,200円

国際数学連合・ユニセフ「世界数学年」企画



1990年フィールズ賞受賞記者会見の席の森重文教授（第6巻収録）

第6巻 12月発売

■ 執筆教授陣 ■
アーノルド（ステクロフ数学研究所）
ウィッテン（プリンストン高等研究所）
グロモフ（フランス高等科学研究所）
小林俊行（京大数理解析研究所）
コンツェビッチ（フランス高等科学研究所）
スメイル（第1回高木レクチャー来日講演決定!）
ファルティングス（マックス・プランク研究所）
ペンローズ（オックスフォード大学）
マクダフ（ニューヨーク州立大学）
マルグリス（エール大学）
マンフォード（ブラウン大学）
森 重文（京大数理解析研究所）
ヤオ（ハーバード大学）
ラックス（クーラント研究所）
ワイルズ（プリンストン大学）ほか

〈1〉ISBN4-431-70962-2 〈2〉ISBN4-431-70963-0 〈3〉ISBN4-431-71039-6
〈4〉ISBN4-431-71040-X 〈5〉ISBN4-431-71122-8 〈6〉ISBN4-431-71190-2

シュプリンガー・ジャパン株式会社 〒102-0073 東京都千代田区九段北1-11-11 第2フナトビル ▶Call: 03-6831-7005 ▶Fax: 03-6831-7006 ▶Email: orders@springer.jp

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 523 January 2007

ヤング図形で遊ぶ物理と数学

イメージ力を鍛える

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2003 年/12 省略
2004 年/1　ブレーンワールド新展開
/2　幾何学的物理観
/3　統計科学の最前線
/4　演算子・作用素の魅力
別冊　微積分の広がり
/5　現代物理学の進展
/6　量子アルゴリズムの新地平
/7　時間の矢とは
/8　古典力学の新展開
/9　可換から非可換へ
/10　マクロ世界の量子論
別冊　時間論の諸パラダイム
/11　符号化理論の新時代
/12　素粒子物理学の未解決問題
2005 年/1　素数の魅力と不思議
/2　エンタングルメント理論とその展開
/3　最新 脳の数学理論
/4　量子重力理論最前線
別冊　相対論の歩み
/5　ベクトル
/6　物理法則と方程式
/7　量子異常とは何か
/8　モジュライの広がり
/9　対称性とは何か
/10　不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11　0 の発見
/12　現代代数学への誘い
2006 年/1　偶然から必然へ
/2　物理法則の直観的理解
/3　〈強い力〉
/4　「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5　数学と物理の対話
/6　発見とひらめき
/7　重力は語る
/8　ネットワーク科学の数理
/9　ランダムネス
/10　ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11　固有値問題のひろがり
/12　素粒子像の探究

数理科学臨時別冊一覧

06 年/1　ゲージ場の量子論入門
06 年/3　現代物理のための解析力学
06 年/5　現代物理数学への招待
06 年/6　例題形式で学ぶ現代素粒子物理学
06 年/7　ソリトンと物理学
06 年/9　確率的情報処理と統計力学
06 年/11　超対称性理論
06 年/12　理工系のための トポロジー・圏論・微分幾何

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

January 2007 MATHEMATICAL SCIENCES Number 523

特集／ヤング図形で遊ぶ物理と数学

ヤング図形百態

氷 上 忍

1. はじめに

ヤング図形が物理で使われ出したのは量子力学が始まりだと思います．そう思って，H. Weyl（ワイル）の『群論と量子力学』（1927 年）[1]を見ると確かに第五章の置換群の表現の所でヤング図形が載っています．この置換群表現は A. Young（ヤング）と G. Frobenius（フロベニウス）によるとあります．さらに Hund（フント）により量子力学で再発見されたとも脚注にあります．Alfred Young の論文[2]は 1900 年で，Frobenius の学生であった Isaiah Schur（シュアー）の学位論文は 1901 年です．

この特集では Weyl の本の 1927 年からちょうど 80 年経った今，ヤング図形がどのように発展しているのか，どのように最近は使われているのか見てみたいと思います．

2. 目を皿にする

ヤング図形そのものは単に箱を並べたものです．銭湯の下駄箱を思い浮かべていただけたらよいかと思います．通常，下駄や靴を左上の箱から詰めていきます．ヤング図形も左上から箱が始まり，最上段の箱の数が最も多く，下に行くほど箱の数は減っていきます．

ヤング図形を表すのに箱の数を上の段から並べるのが使われていますが，ここでは漢字をヤング図形と見立ててみましょう．口，日，目，皿，田，囲，などはヤング図形の格好をしています．これらは数字で表せば，それぞれ $[1]$, $[1^2]$, $[1^3]$, $[3]$, $[2^2]$, $[3^3]$ と表せますが漢字のほうが一目瞭然です．「目を皿にする」と言うことがあります．これは目を大きくするの意味です．ここではヤング図形の「目」を 90 度回転して「皿」にすることとしましょう．つまり，列を行にすることです．後で詳しく述べますが，直交群 $O(N)$ とシンプレクティック群 $Sp(N)$ の間の双対性関係を理解する際にも，この「目を皿にする」方法は役に立ちます．またユニタリ群 $U(N)$ の自己双対性でも「目」が「皿」になります．双対性とは片方が分かれば，もう片方が求まることを言います．あとで詳しく説明しましょう．

「福笑い」という遊びがありますが，これは目隠しして目や口などを置いていく遊びですが，面白い配置ができるので楽しいものです．容易に「目が皿」になったりします．

漢字遊びの次に，15 パズルのことを思い出しましょう．$4 \times 4 - 1 = 15$ の番号が書かれた正方形の駒を四角い枠内で 1 つだけあいた穴を利用して，

番号順に揃える遊びです．これもヤング図形の一種です．ヤング図形に数字が振ってあります．ヤング図形や組合せ論の教科書にこのパズルを解説してあるものがあります．「Jeu de taquin」として紹介されています[3]．最近世界中を席巻している日本発ものに「MANGA」と「SUDOKU」がありますが後者はヤング図形の変形版です（1を左上隅とする左下方向へのあみだ籤の線を書くとヤング図形が得られます）．魔方陣もヤング図形やランダム行列理論による研究があります[4]．この特集の有木氏の論説にあるようにヤング図形は組合せ論と深い関連があります．数ある数学の中で，一番難しいのが組合せ論というのが筆者の印象です．これは，「SUDOKU」や囲碁の例を考えれば納得いくかもしれません．

ヤング図形は最初は単なる箱の並びでしたが，この箱に数字や「色」を付けるとより複雑，高級になります．また，ヤング図形が時間発展することを考慮すると面白い物理現象を説明することになります．囲碁も2色（白，黒）のヤング図形と見られなくもありません．囲碁はこのヤング図形の時間発展の問題になります．この時間発展は笹本氏のランダム結晶成長によく似ています．また，碁盤の2つの角の石や3つの角の石が絡み合ってくると，太田氏の論説の図1や加藤晃史氏の論説の図6のようになり，そのスペクトラル曲線は普遍法則に従う形になります．さしずめ，秀策流定石といったところです．Seiberg–Wittenのスペクトラル曲線などがヤング図形を通して秀策流定石と関係していると考えると楽しくなります．

3. Harish-Chandraの公式

紙面も少し余裕があるようなので，一つだけヤング図形に関係した積分公式の話をして，特集全体の関連性を見ることにします．

Harish-Chandra（ハリシュ・チャンドラ）はDirac（ディラック）の学生でしたが，Diracの逸話にあるように見事数学に転向しました．ここではリーマンゼータ関数のモーメント平均[5]やリーマン面の曲線のモジュライの交点数[6]に使われたHarish-Chandraの公式を取り上げてみましょう[7]．

$$I(X,\Lambda)=\int \exp(\mathrm{tr}gXg^{-1}\Lambda)dg. \qquad (1)$$

ここで X と Λ は $N\times N$ の複素エルミート行列ですが，g をユニタリ群とするので実数の対角行列としても一般性を失いません．この積分は X と Λ の固有値をそれぞれ x_i, λ_i $(i=1,\cdots,N)$ とすると

$$I(X,\Lambda)=\prod_{p=1}^{N-1}p!\frac{1}{\Delta(x)\Delta(\lambda)}\det[\exp(x_i\lambda_j)] \qquad (2)$$

となります．ここで $\Delta(x)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ はVandermonde行列式です．

この公式は以下のような様々な方法で導出できます．最初にItzyksonとZuberはこの公式を1980年に再発見しています[8]．Itzykson–Zuberはヤング図形で表される線形群の指標（character）χ を用いて

$$I(X,\Lambda)=\sum_{\{n\}}\frac{\sigma_{\{n\}}}{|n|!d_{\{n\}}}\chi_{\{n\}}(X)\chi_{\{n\}}(\Lambda) \qquad (3)$$

と表して上の公式を得ました．ここで n はヤング図形の箱の数を表します．指標とヤング図形の関係は，例えば $n=1$ の口には

$$\chi(\text{口})=\mathrm{tr}X, \qquad (4)$$

$n=2$ の日には

$$\chi(\text{日})=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}X)^2-\mathrm{tr}X^2], \qquad (5)$$

日を横にしたヤング図形には前式の $-$ を $+$ にした指標 $\chi=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}X)^2+\mathrm{tr}X^2]$ が対応します．$d_{\{n\}}$ は N に関係した次元です．また $\sigma_{\{n\}}$ はヤング図形が持つ対称性に関係した数です．「目」と「皿」に対して指標は

$$\chi(\text{目})=\frac{1}{6}[(\mathrm{tr}X)^3+2\mathrm{tr}X^3-3\mathrm{tr}X\mathrm{tr}X^2], \qquad (6)$$

$$\chi(\text{皿}) = \frac{1}{6}[(\mathrm{tr}X)^3 + 2\mathrm{tr}X^3 + 3\mathrm{tr}X\mathrm{tr}X^2] \tag{7}$$

となります．ここで $\mathrm{tr}X = \sum x_i$, $\mathrm{tr}X^2 = \sum x_i^2$ ですから $\chi(\text{皿})$ は x_i の 3 次の対称多項式になります．

さて，この Harish-Chandra の公式は Atiyah–Bott の局在定理を使っても求められます．この方法により Duistermaat–Heckman[9]が導出しました．この公式の結果を見ると Baker–Akhiezer 関数と呼ばれる形になっています．すなわち，WKB 近似が exact に成り立っています．Vandermonde 行列式の部分は鞍点の周りの Gauss 積分により得られます．加藤晃史氏の論説の 8 節の公式をご覧下さい．この Harish-Chandra 積分は可積分系の τ（タウ）関数にもなっています．

この積分 I が満たす微分方程式を考えると公式を一番簡単に求めることができます[5,10]．ラプラシアン作用素 L を

$$L = \frac{\partial^2}{\partial X_{ij}^2} \tag{8}$$

とすると

$$Le^{\mathrm{tr}X\Lambda} = (\mathrm{tr}\Lambda^2)e^{\mathrm{tr}X\Lambda} \tag{9}$$

となり，ラプラシアンは固有値 x_i で書くことができて

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] I = \epsilon I \tag{10}$$

となります．$\epsilon = \mathrm{tr}\Lambda^2$ で，β は今の場合 2 ですが，Calgero–Moser–Sutherland の微分方程式（加藤雄介氏，三町氏のハミルトニアン参照）を考えて β として置きます．（積分変数の群 g が $O(N)$, $Sp(N)$ のとき $\beta = 1, \beta = 4$ となります）．

さて，I を

$$\psi(x_i) = |\Delta(x_i)|^{\beta/2} I \tag{11}$$

とすると，ψ の満たす微分方程式は

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \beta\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)\sum_{i<j}\frac{1}{(x_i - x_j)^2}\right]\psi = \epsilon\psi \tag{12}$$

となり，$\beta = 2$ の場合は単に平面波（$i = \sqrt{-1}$ を除いた）の式になります．$|\Delta(x_i)|$ の因子を考えると，公式が得られます．つまり量子統計力学で習う所のフェルミ粒子の Slater 行列式と一致します．そのように思うとヤング図形はフェルミ粒子を表していることになるので，ヤング図形の輪郭はフェルミ面を意味します．またそのように思うと笹本氏の結晶成長の論説や太田氏の論説は理解し易くなるでしょう．

一般の β の場合には指標 χ が β をパラメターとした Jack 多項式になりますが Slater 行列式にはなりません．この一般の β の場合，ヤング図形と Jack 多項式の関係には興味深い双対性が見られます．これはヤング図形に隠された対称性があることになります[10]．

β が一般の場合の「目」と「皿」には次のような指標（Jack 多項式）が対応します．Jack 多項式を歴史的に zonal polynomial と呼んで Z で表すことがあります．また $\alpha = \frac{2}{\beta}$ のパラメターを使うことがあります（三町氏の論説参照）．

$$\chi(\text{目}) = (\mathrm{tr}X)^3 - 3(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}X^2) + 2\mathrm{tr}X^3, \tag{13}$$

$$\chi(\text{皿}) = (\mathrm{tr}X)^3 + \frac{6}{\beta}(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}X^2) + \frac{8}{\beta^2}\mathrm{tr}X^3 \tag{14}$$

となります．

ここで $X = I$ としてみましょう．すると $\chi(\text{目}) = N(N-1)(N-2)$, $\chi(\text{皿}) = N(N+\frac{2}{\beta})(N+\frac{4}{\beta})$ と因数分解されます．ユニタリ群の場合は $\beta = 2$ ですから，$N \to -N$ とすることで目から皿へ互いに符号を別として移ることができます．これは $U(N) = U(-N)$ を意味し，ユニタリ群の自己双対性です．もちろん他のヤング図形でも成り立ちます．$X = I, \beta = 1$ の $\chi(\text{目}) = N(N-1)(N-2)$ が $N \to -2N$ によって $\beta = 4$ の $\chi(\text{皿}) = N(N+\frac{1}{2})(N+1)$ になります．これ

は $O(-2N) = Sp(N)$ の関係で，列と行をひっくり返す関係式でヤング図形に隠された双対性です．

最後に Schur 関数との関連を述べておきます．これは $\beta = 2$ の指標 χ に等しく，次の行列式の比の形に書けます．実はこれは Jacobi（ヤコビ）が最初に（1841 年）発見したのですが Schur が再発見して，一般に Schur 関数と呼ばれています．

$$\chi(\lambda) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+N-j})}{\det(x_i^{N-j})}. \qquad (15)$$

ここで $1 \leq i, j \leq N$ で λ はヤング図形の箱の数に相当する分配です．例えば $N = 2$, つまり x_1 と x_2 しかない場合を考えてみましょう．Schur 関数は x_1 と x_2 の多項式になるはずです．ヤング図形が口の場合は $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ となって，分母の行列式は $x_1 - x_2$, 分子の行列式は $x_1^2 - x_2^2$ となり，比は $x_1 + x_2 = \mathrm{tr}X$ となりますから前出の χ(口) に等しくなります．日の場合は $\lambda = (1, 1)$ で日を横にしたヤング図形の場合は $\lambda = (2, 0)$ です．この場合も前出の結果と一致します．それぞれ x_1x_2 と $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ になります．演習問題として目や皿の Schur 関数を求めてみて下さい．($N = 2$ の場合，皿のときは $\lambda = (3, 0)$ ですが目の場合は λ をうまく選べませんので目の場合は $N = 2$ のとき χ(目) $= 0$ です．$N = 3$ のときを $\lambda = (1, 1, 1)$ として調べて下さい．)

4. 終わりに

ヤング図形の入門的なことを述べました．最近の発展に関する以下の論説を目を回さないようにしっかりとお読み下さい．

参考文献

1) H. Weyl, "The Theory of Groups and Quantum Mechanics", 1927, Dover Publications, INC.
2) A. Young, *Proc. Lond. Math. Soc.* **33**, 97 (1900).
3) L. Manivel, Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci, *SMF/AMS texts and monographs*, Vol.**6**. (2001).
4) P. Diaconis and A. Gamburd, *Electronic Journal of Combinatorics*, **11**, Jun 3, (2004).
5) E. Brézin and S. Hikami, *Commun. Math. Phys.* **214**, 111 (2000).
6) M. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.* **147**, 1 (1992).
7) Harish-Chandra, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **42**, 252 (1956).
8) C. Itzykson and J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.* **21**, 411 (1980).
9) J.J. Duistermaat and G.H. Heckman, *Invent. Math.* **69**, 259 (1982).
10) S. Hikami and E. Brézin, *Prog. Theor. Phys.* **116**, 441 (2006).

（ひかみ・しのぶ，東京大学大学院総合文化研究科）

ヤング図形と直交多項式

ヴィラソロ代数とジャック多項式

三町　勝久

1. ヴィラソロ代数とジャック多項式

10年以上も昔のことである．しばらく続いている渇水の福岡も，もう秋．空は蒼く，風もさわやかになっていた．そのようなある日の昼休み，私（M）とYさんは，いつものようにチャンポンを食べ，そのおいしさに満足しながら，ぶらぶら歩いて研究室に戻る途上であった．

Y「シューア多項式の q 類似ってないんですか？」

M「ないと思うな．シューア多項式の変数はトーラスの座標でしょ．いっぽう，量子群で出てくるトーラスはそれを含む群が量子化されたあとでも，相変わらず普通のトーラスだよね．だから，シューア多項式は量子化される必要がないというのが僕の理解なので」

Y「そのような説明は以前にもどこかでしてくれたんだけど…．そういうのがあると非常に助かるんですよね」

M「はあ？ もっと詳しく教えてよ」

Y「脇本・山田（裕史）の論文[8]で，ヴィラソロ代数のシンギュラー・ベクターがシューアで書けるというのを知っているでしょう？」

M「何かそんなのあったような気がする．ワラック[9]に先に書かれちゃったやつかな」

Y「あれは，セントラル・チャージが1の場合で，それを含む一般の場合もあるんだけど，そこに出て来る函数がよく判らない．どこか他に出てきてないかと探したけど，結局わからなかった．でも，セントラル・チャージが1のときはシューアなんだから，誰かがどこかで考えていても良さそうだと思ったんですよね」

M「だから，先ほどの質問になるわけね」

Y「そう」

M「でも，それって，何で q なの？」

Y「1にしたらシューアだから」

M「それだけ？」

Y「それだけ」

M「……」

M「それって，質問の仕方を間違えているんじゃないかな」

Y「え，どういうこと？」

M「さっき，シューアの q 類似はないと説明したけれど，シューアに変形パラメータを1つ入れて，そのパラメータを特殊化するとちゃんとシューアに戻るという函数が1つあるんだよ．でも，q ではない」

Y「もちろん q でなくてもいいですが…，何ですか，それは？」

M「ジャック多項式」

Y「ジャック多項式？」

M「そう．ジャック多項式．対称空間の球函数として現れて，統計学でも利用されている対称多項式の一種だよ．1960年代に見つかったのだけど，深い研究は最近ようやく始まったばかりで…」

Y「で，その多項式の具体的な形はどこかの論文

などに書かれてるんですか？」

M「いや，どこにも出てないと思うな．でも，僕のノートにいくつか書き下したものがあるから，それを見てみる？」

Y「そうしましょう」

ということで，Y さんは筆者の研究室に寄っていった（食後，どちらかの部屋で，お茶を飲みながら雑談するのは恒例なのであったが）．

さて，テーブルの上に広げられたリング式の B5 の小さな計算ノートに眼を走らせていた Y さんは，やがて，係数の分母に見覚えある特徴的な因子を見つけると「うん，これだ．たぶん間違いない」と言って彼の部屋に論文を取りに帰り，再び筆者の部屋で両者をつき合わせて，いくつかの係数を除いて同じであることを確認した．

そして，合わなかった係数も「論文の誤植と思うので確認してくる」といって部屋に戻って計算し，「やっぱり誤植だった」と電話で報告してきた（Y さんの部屋は一つ下の階だが，走ってやってくる時間も勿体なかったのである）．

このようにして，論文に書かれていた式（7 つあった）すべてがジャック多項式であると確認された．もはや，一般的な成立は疑いないことであった．

2. ヴィラソロ代数とシンギュラー・ベクター

ヴィラソロ代数は，生成元を L_n $(n \in \mathbb{Z})$, C として，

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{C}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},$$
$$[C, L_n] = 0$$

なる基本関係をもつ無限次元リー代数である．

ヴィラソロ代数の表現論は 1980 年代中頃までに，カッツ，フェイギン・フックスらにより，ほぼ満足のいく形に整備され，その結果を踏まえて構成されたのが共形場理論[7,10]であることは広く知られている．

いま，ベクトル $|h\rangle$ $(h \in \mathbb{C})$ を

$$L_n|h\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad L_0|h\rangle = h|h\rangle,$$
$$C|h\rangle = c|h\rangle \quad (c \in \mathbb{C})$$

を満たすものとし，$|h\rangle$ により生成されるヴィラソロ代数の表現を V_h と表す．中心 C に対する値 c がセントラル・チャージであり，理論を指定する重要なパラメタである．

そして，V_h を L_0 により固有分解したときの固有値 $h+n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対する固有空間 $V_h(n)$ の元をレベル n の元と言う．

この表現空間 V_h の中で，$L_n|\chi\rangle = 0$ $(n > 0)$ を満たす $|\chi\rangle$ をシンギュラー・ベクターと言うが，自明なシンギュラー・ベクターと言える最高重みベクトル $|h\rangle$ 以外にシンギュラー・ベクターが存在するかどうかは，表現空間 V_h の構造を知る上で基本的な問題である．既約表現はシンギュラー・ベクターで生成される表現の部分商をとることで得られる仕組みだからである．これについては，複素パラメタ t および $rs > 0$ なる整数 r, s を用いて，

$$c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right),$$
$$h = h_{r,s} = \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t} \tag{1}$$

とおくとき，表現 $V_{h_{r,s}}$ はレベル rs にシンギュラー・ベクターを持ち，スカラー倍を除いて一意的であることが知られている．例えば，$L_{-1}^2|h_{2,1}\rangle - tL_{-2}|h_{2,1}\rangle$ はレベル 2 のシンギュラー・ベクターである．

3. 対称多項式

多項式環 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ は，変数の入れ替えによる対称群 S_n の作用をもち，この作用により不変な元全体

$$\mathbb{R}[x]^{S_n} = \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n}$$

が n 変数対称多項式の空間である．この空間は様々な特徴的基底をもつ．

いま，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を深さが n 以下のヤング図形とするとき，単項対称多項式 m_λ を

$$m_\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\beta\in S_n\lambda}x^\beta$$

により定義する．ただし，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して $x^\beta = x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ とし，和は $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ の入れ替えで生じる異なるもの全体をとるとする．

例えば，$m_{(21)}(x)=\sum_{1\le i\ne j\le n}x_i^2x_j$ である．

深さが n 以下のヤング図形 λ 全体に対する単項対称多項式 $m_\lambda(x)$ は，$\mathbb{R}[x]^{S_n}$ の基底を与える．

また，非負整数 r に対して r 次の基本対称多項式

$$e_r(x)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r},$$

完全対称多項式

$$h_r(x)=\sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r},$$

ベキ和対称多項式

$$p_r(x)=\sum_{i=1}^n x_i^r,$$

を用いて，ヤング図形 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して定義される

$$e_\lambda(x)=e_{\lambda_1}(x)e_{\lambda_2}(x)\cdots,$$
$$h_\lambda(x)=h_{\lambda_1}(x)h_{\lambda_2}(x)\cdots,$$
$$p_\lambda(x)=p_{\lambda_1}(x)p_{\lambda_2}(x)\cdots$$

はどれも $\mathbb{R}[x]^{S_n}$ の基底を与える．

また，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して

$$a_\alpha(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{w\in S_n}\mathrm{sgn}(w)x^{w(\alpha)}=\det(x_i^{\alpha_j})_{1\le i,j\le n}$$

と定義すれば，$a_\alpha(x)$ は交代式であり，特に $\delta=(n-1,n-2,\cdots,1,0)$ のとき，$a_\delta(x)$ はファンデルモンドの行列式であり差積 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ に他ならない．そして，ヤング図形 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して

$$s_\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{a_{\lambda+\delta}(x_1,\cdots,x_n)}{a_\delta(x_1,\cdots,x_n)}$$

と定義した対称多項式がシューア多項式であり，$\mathbb{R}[x]^{S_n}$ の基底を与える．

シューア多項式は一般線形群 $GL(n;\mathbb{C})$ の多項式表現の指標として自然に現れ，その場合の $x_1,\cdots,x_n$ は $GL(n;\mathbb{C})$ のトーラス部分群の座標に対応している．

4. ジャック多項式

深さが n 以下のヤング図形 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を固定し，微分作用素

$$D=\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}+\sum_{1\le i\ne j\le n}\frac{x_i^2}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

を用いた固有値問題

$$DF(x_1,\cdots,x_n)=c_\lambda F(x_1,\cdots,x_n),$$
$$c_\lambda=\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n\lambda_i(\lambda_i-1)-\sum_{i=1}^n(i-1)\lambda_i+(n-1)\sum_{i=1}^n\lambda_i$$

を考えると，

$$J_\lambda(x_1,\cdots,x_n;\alpha)=m_\lambda(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{\mu<\lambda}a_{\lambda\mu}\,m_\mu(x_1,\cdots,x_n),\quad a_{\lambda\mu}\in\mathbb{R}$$

という形の解が一意的に定まる．この $J_\lambda(x)=J_\lambda(x_1,\cdots,x_n;\alpha)$ がジャック多項式である．

ここで用いた $\lambda\ge\mu$ は，ヤング図形全体の集合上，$|\lambda|=\sum_i\lambda_i$ として，

$|\lambda|=|\mu|$ かつ，すべての $i\ge 1$ に対して $\lambda_1+\cdots+\lambda_i\ge\mu_1+\cdots+\mu_i$

により定義されるものである．これはヤング図形におけるドミナンス・オーダーまたは自然な順序と呼ばれるものであり，$|\lambda|\le 5$ の場合には全順序だが，$|\lambda|\ge 6$ の場合は全順序とはならない．

ジャック多項式を低次の場合にいくつか書き出すと

$$J_{(2)} = e_{(1^2)} - \frac{2\alpha}{\alpha+1}e_2, \tag{2}$$

$$J_{(1^2)} = e_2, \tag{3}$$

$$J_{(3)} = e_{(1^3)} - \frac{6\alpha}{2\alpha+1}e_{(21)} + \frac{6\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}e_3, \tag{4}$$

$$J_{(1^3)} = e_3, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} J_{(4)} = e_{(1^4)} &- \frac{12\alpha}{3\alpha+1}e_{(21^2)} \\ &+ \frac{12\alpha^2}{(2\alpha+1)(3\alpha+1)}e_{(2^2)} \\ &+ \frac{24\alpha^2}{(2\alpha+1)(3\alpha+1)}e_{(31)} \\ &- \frac{24\alpha^3}{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}e_4, \end{aligned} \tag{6}$$

$$J_{(2^2)} = e_{(2^2)} - \frac{2\alpha}{\alpha+1}e_{(31)} + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}e_4, \tag{7}$$

$$J_{(1^4)} = e_4 \tag{8}$$

となる．ただし，ここで $(1^2) = (1,1)$ etc とした．また，もちろん $e_i = e_{(i)}$ である．

このジャック多項式 $J_\lambda(x;\alpha)$ はパラメタ α を特殊化すると，様々な特殊多項式に退化する．具体的には，以下のようになる．

(i) $\alpha = 1$ のとき，シューア多項式 $s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$.

(ii) $\alpha = 0$ のとき，基本対称式 $e_{\lambda'}(x_1, \cdots, x_n)$ の定数倍．ただし，λ' はヤング図形 λ を対角線で折り返したもの．

(iii) $\alpha = \infty$ のとき，$m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$.

(iv) $\alpha = 2$ のとき，対称空間 $GL(n)/SO(n)$ の帯球函数として現れる帯多項式 $Z_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$.

(v) $\alpha = 1/2$ のとき，対称空間 $GL(2n)/Sp(n)$ の帯球函数．

このジャック多項式は

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{n!}\left[f(x)g(x^{-1})\Delta(x;\alpha)\right]_0,$$

$$\Delta(x;\alpha) = \prod_{1\le i\ne j\le n}(1 - x_i/x_j)^{1/\alpha}.$$

を内積とした

$$\langle J_\lambda(x;\alpha), J_\mu(x;\alpha) \rangle = 0, \quad \mu \ne \lambda$$

なる直交多項式である．ただし，$[F(x)]_0$ でローラン多項式 $F(x)$ の定数項を表すものとした．

また，$1/\alpha$ が非負整数のときは

$$\langle J_\lambda(x;\alpha), J_\lambda(x;\alpha) \rangle = \prod_{i<j}\prod_{m=0}^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{\lambda_i - \lambda_j + (j-i)/\alpha + m}{\lambda_i - \lambda_j + (j-i)/\alpha - m}$$

である．

5. フォック表現による実現

ヴィラソロ代数の表現とジャック多項式を結びつけるために，ヴィラソロ代数の表現をボソン場を用いて構成する．

まず，$\beta \in \mathbb{C}$ および $r, s \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\alpha_{r,s} = (1+r)\frac{\beta}{2} - (1+s)\frac{1}{\beta}, \quad t = \frac{\beta^2}{2}$$

とおく．さらに，簡単のため $\alpha_0 = \alpha_{0,0}$ とおく．

ハイゼンベルグ代数 $\mathcal{A}$ は a_n $(n \in \mathbb{Z})$ を生成元，

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$$

を基本関係式とする $\mathbb{C}$-代数である．いま，F_α でもって，生成元 $|\alpha\rangle$ および基本関係式

$$a_n|\alpha\rangle = 0\ (n>0), \quad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

なる $\mathcal{A}$-加群を表すとする．このとき，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} :a_{n-m}a_m: - \alpha_0(n+1)a_n$$

とおくと，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(1 - 12{\alpha_0}^2)(n^3 - n)\delta_{n+m,0}$$

なる関係が得られ，セントラル・チャージ

$$c = 1 - 12{\alpha_0}^2 = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

のヴィラソロ代数の表現が実現できたことになる．ここで，正規積

$$:a_n a_m: = \begin{cases} a_n a_m & (n \leq m), \\ a_m a_n & (n > m) \end{cases}$$

を用いた．そして，F_α において，

$$L_n|\alpha\rangle = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0}), \quad L_0|\alpha\rangle = h_\alpha|\alpha\rangle,$$
$$h_\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha_0\alpha$$

が成立する．これは，F_α が最高ウェイト・ベクター $|\alpha\rangle$，最高ウェイト h_α をもつヴィラソロ代数の最高ウェイト表現であることを示している．この表現をヴィラソロ代数のフォック表現と呼ぶ．そして，$\beta^2 = 2t$ を用いれば

$$\begin{aligned} h_{\alpha_{r,s}} &= \frac{\alpha_{r,s}^2}{2} - \alpha_0\alpha_{r,s} \\ &= \frac{1}{2}\left((1+r)\frac{\beta}{2} - (1+s)\frac{1}{\beta}\right) \\ &\quad \times \left((r-1)\frac{\beta}{2} - (s-1)\frac{1}{\beta}\right) \\ &= \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t} \end{aligned}$$

だから，(1) における $h_{r,s}$ との関係は $h_{\alpha_{r,s}} = h_{r,s}$ である．したがって，$rs > 0$ なる整数 r, s に対して，フォック表現 $F_{\alpha_{r,s}}$ は定数倍を除いて一意的にレベル $N = rs$ のシンギュラー・ベクターをもつ．

これは，多項式 $P_{r,s} \in \mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \cdots, a_{-rs}]$ が存在して

$$F_{\alpha_{r,s}}(rs) = \mathbb{C}P_{r,s}|\alpha_{r,s}\rangle$$

と表せる[6]ということを言っている．そして，この多項式こそが，今回の主役の多項式であり，次のようにジャック多項式として具体的に特定できるというのである．

定理[1,4]　$1 \leq m \leq n$ に対して，

$$\rho_n : \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{S_n} \\ \to \mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \cdots, a_{-n}]$$

なる代数的準同型を

$$\rho_n(p_m(x)) = (-1)^{m-1}\beta a_{-m}$$

で定めるとき，$n \geq rs$ なる $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$P_{r,s} = \rho_n(J_{(r^s)}(x_1, \cdots, x_n; t))$$

が成り立つ．ここで，(r^s) は縦に s 個，横に r 個の箱が並んだ長方形のヤング図形である．□

結局は，このように，一般的に証明されるに至ったが，冒頭で述べた論文に書かれていた7つの式は，この定理における代数的準同型 ρ_n を介しての (2)–(8) のジャック多項式そのものだったのである．

6. 量子可積分系

ジャック多項式 $J_\lambda(x; k^{-1})$ と $\Delta(x; k^{-1})$ の積 $J_\lambda(x; k^{-1})\Delta(x; k^{-1})$ のみたす微分方程式はカロジェロ・サザーランド模型と呼ばれる非自明な相互作用を持つ1次元量子多体系の可積分モデルのハミルトニアン

$$L_2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + k(k-1)\sum_{i \neq j} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{t_i - t_j}{2}\right)}$$

の固有値問題に対応し，$\Delta(x; k^{-1})$ が基底状態，$J_\lambda(x; k^{-1})\Delta(x; k^{-1})$ が励起状態を表す．このように，多変数の直交多項式は量子可積分系の理論にも自然と現れる．相互作用をもつ量子系の中に，その固有函数などが求められるものがほとんど知られていなかった当時としては，驚くべき事実である．

本稿の話によれば，この量子可積分系とヴィラソロ代数が不思議なことに結びついたことになる．そして，この不思議を介在するフォック表現＝ボ

ソン表示を白石潤一さんは「秘密のトンネル」と言っている[5]．

7. マクドナルド多項式

q 差分作用素

$$M = \sum_{1 \le i \le n} \prod_{j \ne i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i},$$

$$(T_{q,x_i} f)(\cdots, x_i, \cdots) = f(\cdots, qx_i, \cdots)$$

を用いた固有値問題

$$M P_\lambda(x) = c_\lambda P_\lambda(x), \quad c_\lambda = \sum_{1 \le i \le n} q^{\lambda_i} t^{n-i}$$

において，一意的に決まる

$$P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda\mu}\, m_\mu(x), \quad (a_{\lambda\mu} \in \mathbb{R})$$

という形の解 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x_1, \cdots, x_n; t)$ をマクドナルド多項式と言う．λ は深さが n 以下のヤング図形である．

マクドナルド多項式 $P_\lambda(x)$ は $t = q^{1/\alpha}$ としてから $q \to 1$ とするとジャック多項式 $J_\lambda(x; \alpha)$ になるという意味で，ジャック多項式の q 類似である．そして，$t = q$ とすると，$P_\lambda(x)$ はシューア多項式 $s_\lambda(x)$ になる．

マクドナルド多項式 $P_\lambda(x)$ は

$$\langle f(x), g(x) \rangle_n' = \frac{1}{n!} \left[f(x) g(x^{-1}) \Delta(x; q, t) \right]_0,$$

$$\Delta(x; q, t) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty (x_j/x_i; q)_\infty}{(tx_i/x_j; q)_\infty (tx_j/x_i; q)_\infty}$$

により定義される内積に対し，

$$\langle P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle_n' = 0, \quad \mu \ne \lambda$$

を満たす直交多項式である．

マクドナルド多項式はルート系の枠組みを用いてさらに一般化される．A_{n-1} 型ルート系に付随するウェイト・ラティスを図示化したものがヤング図形であるということをヒントに，各ルート系 X_n に対する直交多項式が定義されるのである．それらはルート系に付随するマクドナルド多項式と呼ばれ，アフィン・ヘッケ代数との関連などが明らかにされている[3]．

参考文献

1) H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi: Collective fields, Calogero-Sutherland model and generalized matrix models, *Phys. Lett.*, **B347** (1995), 49–55.
2) M. Kato and Y. Yamada: Missing link between Virasoro and $\widehat{sl(2)}$ Kac-Moody algebras, *Prog. Theoretical Physics, Suppl.*, **110** (1992), 291–302.
3) 三町勝久：「ダイソンからマクドナルドまで—マクドナルド多項式入門」，代数百科 I『群論の進化』(堀田良之・渡辺敬一・庄司俊明・三町勝久著)，pp.335–437，朝倉書店，2004.
4) K. Mimachi and Y. Yamada: Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, *Commun. Math. Phys.*, **174** (1995), 447–455.
5) 白石潤一：『量子可積分系入門』，サイエンス社，2003.
6) A. Tsuchiya and Y. Kanie: Fock space representations of the Virasoro algebra—Intertwining operators, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, **22** (1986). 259–327.
7) 土屋昭博・山田泰彦：共形場理論—交錯する多彩な数学，数理科学 **12** (2005), 54–60.
8) M. Wakimoto and H. Yamada: The Fock representations of the Virasoro algebra and the Hirota equations of the modified KP hierarchy, *Hiroshima Math. J.*, **16** (1986), 427–441.
9) N.R. Wallach: Classical invariant theory and the Virasoro algebra, in "Vertex operators in Mathematics and Physics", J. Lepowsky et al. ed., Springer, 1985, 475–482.
10) 山田泰彦：『共形場理論入門』，数理物理シリーズ 1，培風館，2006.

（みまち・かつひさ，東京工業大学大学院理工学研究科）

微分方程式とヤング図形

岡本多項式とその仲間たち



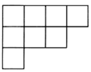
山田 泰彦

1. Schur 多項式

整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ に対して, **Schur 多項式** s_λ を次で定義しよう：

$$s_\lambda = \det\left(p_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \le i,j \le l}. \tag{1}$$

式 (1) は **Jacobi–Trudi の公式**と呼ばれる[1]. 変数 p_i は, とりあえず, $p_0 = 1$, $p_i = 0$, $(i < 0)$ とだけ仮定しておく.

例えば, $\lambda = (4,3,1) =$  の場合には,

$$s_{(4,3,1)} = \begin{vmatrix} p_4 & p_5 & p_6 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}$$

である. "対角成分は $p_{\lambda_1}, \cdots, p_{\lambda_l}$ で, 右 (左) にずれると添字が 1 増える (減る)" と読めば覚えやすい.

p_{j-i} を (i,j) 成分とする上三角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{p_1} & p_2 & p_3 & \underline{p_4} & p_5 & \underline{p_6} & p_7 & \cdots \\ & \underline{1} & p_1 & p_2 & \underline{p_3} & p_4 & \underline{p_5} & p_6 & \cdots \\ & \underline{0} & 1 & p_1 & \underline{p_2} & p_3 & \underline{p_4} & p_5 & \cdots \\ & & & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \end{bmatrix}$$

を考えると, 行の添字列を $I = (1, 2, \cdots, l)$, 列の添字列を $J = (\lambda_l + 1, \lambda_{l-1} + 2, \cdots, \lambda_1 + l)$ とした場合の, l 次の小行列式が s_λ に等しい. 例えば, $\lambda = (4,3,1) \leftrightarrow J = (2,5,7)$ である (行列の下線部分). この J は,

○	●	○	○	●	○	●

のように図示され, これを **Maya 図**と言う.

λ が**分割** $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_l \ge 0$ の場合は, J は増大列 $1 \le J_1 < J_2 < \cdots < J_l$ である. この場合, λ に対応する **Young** 図から Maya 図を得るには, "Young 図の境界を左下から右上に追跡して, 各ステップで, 右向きなら○, 上向きなら●" と読む. Maya 図の左に●を, 右に○を任意個追加しても対応する s_λ は同じである.

分割でない λ についても, 式 (1) をそのまま用いて s_λ を定める. この定義から, 例えば

$$s_{(2,5,1)} = \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} = -s_{(4,3,1)}$$

である. $\lambda = (2,5,1) \leftrightarrow J = (2,7,5)$ なので, J で見れば単に順序の交換である. 一般に

$$\begin{aligned} &s_{(\cdots,m,n,\cdots)} = -s_{(\cdots,n-1,m+1,\cdots)}, \\ &s_{(\cdots,n,n+1,\cdots)} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

および $s_{(\cdots,0)} = s_{(\cdots)}$, $s_{(\cdots,k)} = 0$, $(k < 0)$ が成り立つ.

2. 独立変数は何か？

式 (1) の s_λ は, $p_1, p_2, \cdots$ の多項式ではあるが,

普通は $p_1, p_2, \cdots$ を独立変数とは見ない．Schur 多項式としての標準的な独立変数のとり方は別のものがあり，しかも，次のように2通りあるのでややこしい．

A. 変数 $t = (t_1, t_2, \cdots)$．母関数：

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j. \tag{3}$$

B. 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$．母関数：

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - x_i z} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j. \tag{4}$$

両者の変数は

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} x_i^n$$

で関係するので nt_n を**巾和変数**と呼ぶ．x_i には適当な名前がないので，仕方なく「巾和じゃないほう」とか言ったりする．

当面は A の流儀を用いる．このとき p_n は

$$p_1 = t_1,$$
$$p_2 = t_2 + \frac{t_1^2}{2},$$
$$p_3 = t_3 + t_1 t_2 + \frac{t_1^3}{6}$$

などとなる．実際は，なるべく p_n のままで計算するのが得策である．例えば，p_n の t_k による微分は，定義 (3) から直ちに

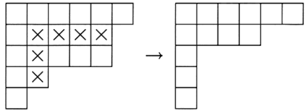
$$\frac{\partial}{\partial t_k} p_n = p_{n-k}$$

が従う．これより，Schur 多項式の微分について

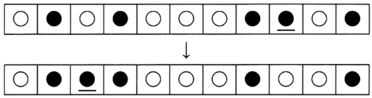
$$\frac{\partial}{\partial t_k} s_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)}$$
$$= s_{(\lambda_1 - k, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)} + s_{(\lambda_1, \lambda_2 - k, \ldots, \lambda_l)} + \cdots + s_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l - k)} \tag{5}$$

を得る（行ごとに微分する）．式 (2), (5) により Schur 多項式の微分が計算される．

式 (5) の右辺の各項は，Maya 図では，1 個の● が k だけ左にずれたもの，Young 図で見ると**長さ k のフック**を 1 つ削ったものに対応する．ここでフックとは次の×印で示したような形の Young 図（の一部）を言う．

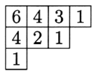

(6)

この例は長さ 6 のフックを表し，右側はそれを削った Young 図である．フックの縦の長さを**深さ** d と言う（例では $d = 3$）．対応する Maya 図は



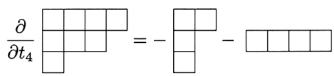
である．<u>●</u> は，移動の際に $d-1$ 個の●を飛び越えるので，符号 $(-1)^{d-1}$ を生ずる．

以上より，Young 図だけを見て Schur 多項式の微分ができる．例えば，$\lambda = (4, 3, 1)$ には次のようなフックが含まれる：



（数字はそのマス目を角とするフックの長さ．）

したがって，$s_{(4,3,1)}$ を t_4 で微分すると，長さ 4 のフック 2 つ（どちらも $d = 2$）が削られて，



となる．特に，“長さ k のフックがない ⇔ s_λ が t_k によらない” となっている．

また，$\deg(t_n) = n$ とすれば，(1), (3) から，p_n, s_λ は同次多項式となり，$\deg(p_n) = n$, $\deg(s_\lambda) = |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ もわかる．

3. KP 方程式

“Schur 多項式は **KP 方程式**の解である”．

実際，この発見を端緒として荘麗な**佐藤理論**が生まれた．KP 方程式は複雑な非線型偏微分方程式系であるが，現代の大和算家広田良吾は**双線型形式**と呼ばれる簡潔な表示を編み出した．それらの中でも最も簡単なものは，

$$(f_{11}+f_2)g-2f_1g_1+f(g_{11}-g_2)$$
$$=(D_1^2+D_2)f\cdot g=0 \qquad (7)$$

である．ここで，f,g は $t=(t_1,t_2,\cdots)$ を変数とする未知関数，添字 i は t_i での偏微分である．D_i は t_i に関する広田の双線型微分作用素で，例えば，

$$D_1^2 f\cdot g=f_{11}g-2f_1g_1+fg_{11}.$$

（俗に“符号を間違えたLeibnizの公式”と言う）．

無限個の未知関数 τ_l $(l\in\mathbf{Z})$ に対して，式(7)を含む連立方程式系

$$(D_1^2+D_2)\tau_l\cdot\tau_{l+1}=0,$$
$$(D_1^3-4D_3-3D_1D_2)\tau_l\cdot\tau_{l+1}=0,$$
$$\vdots$$

を**変形KP階層**と言う（より一般の例は，例えば文献2)）．

以下では，次が有用である．

定理 1. 添字列 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ に対して $(k,\lambda)=(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ とするとき，$f=s_\lambda$，$g=s_{(k,\lambda)}$ は(7)を満たす．

これを直接証明するには，

$$V_a(f)=f\left(t_1-a,t_2-\frac{a^2}{2},t_3-\frac{a^3}{3},\cdots\right)$$

というずらしの作用で $V_a(p_n)=p_n-ap_{n-1}$ となることに注意して，恒等式（本質的にはPlücker関係式）

$$aV_a(f)V_b(g)-bV_b(f)V_a(g)$$
$$=(a-b)V_aV_b(f)g \qquad (8)$$

を導き，これをTaylor展開するのが簡明である．

上の定理1より，Schur多項式の列（または鎖）

$$\cdots\to s_\lambda\to s_{(k,\lambda)}\to s_{(l,k,\lambda)}\to\cdots \qquad (9)$$

は変形KP階層の解を与える．Young図 λ への行 k,l の追加の順序を逆にすれば，$s_{(k,\lambda)}$ を $s_{(l-1,\lambda)}$ に入れ換えた解も得られる．この入れ換え

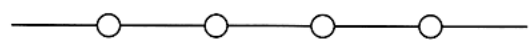
$$\cdots\to s_\lambda \begin{array}{c}\nearrow\\ \searrow\end{array}\begin{array}{c} s_{(k,\lambda)}\\ \Updownarrow\\ s_{(l-1,\lambda)}\end{array}\begin{array}{c}\searrow\\ \nearrow\end{array} s_{(l,k,\lambda)}\to\cdots$$

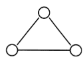
を鎖の各点で考えると，それらは**Weyl群** $\mathfrak{S}_\infty$ を生成する．

さて，τ_l $(l\in\mathbf{Z})$ に次の制限を課したものを n–**簡約変形KP方程式**と言う．

$$\tau_{l+n}=\tau_l,\quad \frac{\partial}{\partial_{t_{ni}}}\tau_l=0.$$

無限鎖(9)を繋いで輪（周期鎖）にしたものである．





以下では，$n=3$ として，方程式

$$(D_1^2+D_2)\tau_l\cdot\tau_{l+1}=0,\quad (l\in\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \quad (10)$$

を考える（**変形Boussinesq方程式**と言う）．

例えば，Young図の3つ組

$$(\lambda,\mu,\nu)=(\phi,\ \square\!\square\ ,\ \square\ )$$

は，$s_{(2,\lambda)}=s_\mu$，$s_{(-1,\mu)}=-s_\nu$，$s_{(-1,\nu)}=-s_\lambda$ を満たし，(10)の解を与える．同様な解が，種となる解 $(\lambda,\mu,\nu)=(\phi,\phi,\phi)$ からWeyl群作用（三角形の折り返し）により生成され，A_2 **格子**上に並べて表すことができる（図1）．どれも，長さ $3k$ のフックがないこと（**3コア**と言う）に注意しよう．

4. 岡本多項式

初期値 $Q_0=Q_1=1$ および漸化式

$$Q_{n+1}Q_{n-1}=\left(\frac{1}{2}D_x^2+x^2+2n-1\right)Q_n\cdot Q_n \qquad (11)$$

によって定まる x の多項式 Q_n を**岡本多項式**と言う．いくつか書いてみると，

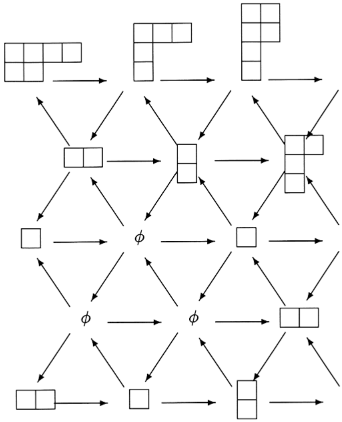


図 1　A_2 格子上の Young 図.

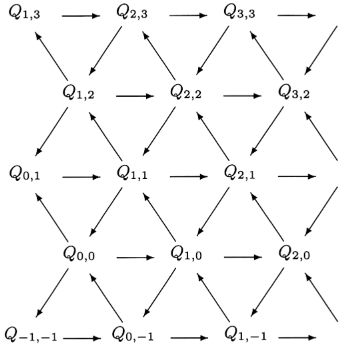


図 2　岡本多項式.

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= x^2+1,\\
Q_3 &= x^6+5x^4+5x^2+5,\\
Q_4 &= x^{12}+14x^{10}+65x^8+140x^6\\
&\quad +175x^4+350x^2+175
\end{aligned}
$$

などとなる．Q_n, Q_{n-1} から Q_{n+1} を求める際に，(11) 式の右辺が Q_{n-1} で割り切れて，Q_{n+1} が多項式になることは著しい性質である．

岡本多項式 Q_n は，より一般に，A_2 格子 (図 2) 上の多項式 $Q_{m,n}$ に拡張され，Q_m はその一部 $Q_m = Q_{m,0}$ である．

これらの多項式 $Q_{m,n}$ は，図 1 に示した Schur 多項式を $t=(x,\frac{1}{2},0,0,\cdots)$ と特殊化し，最高次の係数を 1 に規格化したものである．

$Q_{m,n}$ に対応する Young 図を一般的に指定するのは厄介であるが，Maya 図を使えば，$J = (3\mathbf{Z}_{<m}) \cup (3\mathbf{Z}_{<n}+1) \cup (3\mathbf{Z}_{<0}+2)$ と簡単に書ける．

この $Q_{m,n}$ について，次が成り立つ．

定理 2（野海・Y[3)]）．有理式

$$
y = \frac{Q_{m+1,n}Q_{m,n+1}}{Q_{m,n}Q_{m+1,n+1}}
$$

は，微分方程式

$$
y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 6xy^2 + 3\left(\frac{3}{2}x^2+a\right)y - \frac{b}{y} \tag{12}
$$

のパラメータ $a=m+n$, $b=(1-3m+3n)^2$ における解となる．

方程式 (12) は 4 型 **Painlevé 方程式** P_{IV} と呼ばれ，百年来の由緒ある方程式である．非線型微分方程式の特解が，このように豊富かつ具体的に書けてしまうことの裏には，もちろん，背景となる「からくり」がある．今の場合は，“P_{IV} 方程式が Boussinesq 方程式の**相似簡約**である” というのがそれで，定理 2 は，これから自然に導かれる．

例えば，(τ_0,τ_1,τ_2) が方程式 (10) の同次多項式解で，$\deg(\tau_i)=d_i$ とすると，(7) より，

$$
(D_x^2 - xD_x + d_i - d_{i+1})\tau_i\cdot\tau_{i+1} = 0
$$

$(i\in\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ が成り立つ．これは，P_{IV} 方程式 (12) の双線型化になっていて，

$$
y_i = \left(\log\frac{\tau_{i+1}}{\tau_{i+2}}\right)' + x
$$

は (12) の $a=d_1-d_2$, $b=(1+d_{i+2}-2d_i+d_{i+1})^2$ の解になることがわかる．

5. q–岡本多項式

岡本多項式 $Q_{m,n}$ には q–差分版 $f_{m,n}$ が考えられ，次の漸化式で定義される．

$$
\begin{aligned}
&\overline{f}_{m-1,n}f_{m+1,n+1}\\
&=\overline{f}_{m,n}f_{m,n+1}+xq^{1-m+n}f_{m,n}\overline{f}_{m,n+1},\\
&\overline{f}_{m+1,n}f_{m,n+1}\\
&=\overline{f}_{m+1,n+1}f_{m,n}+xq^{2m-n}f_{m+1,n+1}\overline{f}_{m,n},\\
&\overline{f}_{m+1,n+1}f_{m,n-1}\\
&=\overline{f}_{m,n}f_{m+1,n}+xq^{2n-m}f_{m,n}\overline{f}_{m+1,n}.
\end{aligned}
$$

ここに，$f_{0,0}=f_{1,0}=f_{1,1}=1$．また $f=f(x)$ に対して $\overline{f}=f(qx)$ と書いた．

この q–岡本多項式 $f_{m,n}$ は，$P_{\rm IV}$ 方程式の q–差分版である q–$P_{\rm IV}$ **方程式**の特殊解に付随して現れたもので，$Q_{m,n}$ と同じ Schur 多項式の別の特殊化で与えられる（梶原・野海・Y, 2002）．

改めて p_n を次の母関数で定義する．

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^jz_i)}=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n.$$

これは，B の「巾和じゃない変数」(4) を $N\times\infty$ 個用意して，

$$\{x_1,qx_1,q^2x_1,\cdots\}\cup\{x_2,qx_2,q^2x_2,\cdots\}\cup\cdots\cup\{x_N,qx_N,q^2x_N,\cdots\}$$

と特殊化したもの，または，A の巾和変数 (3) で

$$t_n=\frac{1}{n(1-q^n)}\sum_{i=1}^{N}x_i^n$$

としたものと見なせる．

この p_n で表した Schur 多項式は，q の有理式を係数とする $x_1,\cdots,x_N$ の同次対称多項式となり，これを q–**Schur 多項式** $S_\lambda(x;q)$ と言う．

変数 x_i に関する q–**ずらし作用素**を $T_i(x_j)=q^{\delta_{ij}}x_j$ とすると，変数 p_n の基本的な性質として $T_i(p_n)=p_n-t_ip_{n-1}$，が成り立つ．これから (8) と同様の双線型関係式が導かれ，“q–岡本多項式 = 3–簡約 q–Schur 多項式” がわかる．Taylor 展開が不要なので，計算は微分の場合よりむしろ簡単になっている．差分を考えたご利益である．

(q–) 岡本多項式の話は，3–簡約に限ったことではなく，一般の n–簡約で考えられる．これらは，(q–)$P_{\rm IV}$ を $A_2^{(1)}$ の場合とする一連の非線型方程式系の特殊解を与える．

6. 普遍指標

$P_{\rm IV}$ の岡本多項式と同様に，$P_{\rm II}$ の有理解を表す Yablonski–Vorob'ev 多項式も元祖 Schur 多項式の特殊化であった（梶原・太田, 1996）．これらの結果に続いて，$P_{\rm V}$, $P_{\rm VI}$ の有理解・代数解の研究が進められたが，その中で，増田哲は意外な発見をした．すなわち，これらに付随する特殊多項式（**梅村多項式**）の行列式表示には，右へ行くと添字が増えるような列と添字が減るような列が両方現れるのである．しかも，この奇妙な行列式は小池和彦 (1989) によって定義された**普遍指標**であった（増田・太田・梶原, 2002. 増田, 2003）．

普遍指標の記述のため，p_n の他に，もう一系列の別の変数 q_n を用意する．普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}$ は 2 つの Young 図 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_{l'})$ でラベルされ，次の行列式により定義される：

$$
\begin{aligned}
S_{[\lambda,\mu]}&=\det\left(M_{ij}\right)_{1\le i,j\le l+l'},\\
M_{ij}&=\begin{cases}q_{\mu_{m-i+1}+i-j}, & (i\le l'),\\ p_{\lambda_{i-l'}-i+j}, & (i>l').\end{cases}
\end{aligned}
$$

これは “対角成分が $q_{l'},\cdots,q_1,p_1,\cdots,p_l$．右へ行くと，$q$ の行では添字が減り，p の行では添字が増える” と覚える．

津田照久は，増田等の結果を系統的に説明する枠組みとして，普遍指標を特殊解にもつような双線型方程式系を構成しこれを **UC 階層**と呼んだ (2004)．

Schur 多項式	KP 階層
普遍指標	UC 階層

UC 階層の双線型方程式は，無限階の方程式になってしまい微分方程式としては扱いにくい．実

は，q–差分版である q–UC 階層も津田により構成されていて，こちらのほうがずっと扱いやすい．ここでは, 2 種類の添字集合 I, J でラベルされる変数 ξ_k $(k \in I \cup J)$ が登場し，普遍指標の $p_n(t_1, t_2, \cdots)$ が，次のように選ばれる．

$$t_n = \frac{1}{n(1-q^n)}\left(\sum_{i\in I}\xi_i^n - q^n \sum_{j\in J}\xi_j^n\right).$$

また, q_n は p_n で $q \to 1/q$, $\xi_k \to 1/\xi_k$ $(k \in I \cup J)$ としたものとする．

変数 ξ_k $(k \in I \cup J)$ に関する q–ずらし作用 T_k で，$T_k(p_n) = p_n - t_k p_{n-1}$，$T_k(q_n) = q_n - {t_k}^{-1} q_{n-1}$，となり，これより普遍指標は次を満たす．

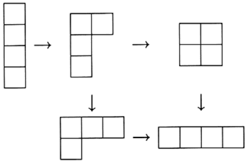
$$t_i T_i(S_{[\lambda,\tilde{\mu}]}) T_j(S_{[\tilde{\lambda},\mu]}) - t_j T_j(S_{[\lambda,\tilde{\mu}]}) T_i(S_{[\tilde{\lambda},\mu]})$$
$$= (t_i - t_j) T_i T_j (S_{[\lambda,\mu]}) S_{[\tilde{\lambda},\tilde{\mu}]}.$$

ここに $\tilde{\lambda} = (k, \lambda)$, $\tilde{\mu} = (k', \mu)$．津田は，これを基に，q–$P_{\rm VI}$（$D_5^{(1)}$ 対称性をもつ）や $E_6^{(1)}$ 型の q–Painlevé 方程式の特殊解の構成に成功した[4]．さらに Garnier 系の特殊解にも普遍指標が現れる（津田，2003)．

第 6 Painlevé 方程式 $P_{\rm VI}$ は，$\mathbf{P}^1$ 上に 4 個の確定特異点をもつ Fuchs 型微分方程式の**モノドロミー保存変形**を与えており，$P_{\rm I}$ から $P_{\rm V}$ はその退化である．

$$\begin{array}{ccccc} P_{\rm VI} & \to & P_{\rm V} & \to & P_{\rm III} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P_{\rm IV} & \to & P_{\rm II} & \to & P_{\rm I}. \end{array}$$

このうち，$P_{\rm II}$ から $P_{\rm V}$ については，4 個の特異点の合流パターンを Young 図で表して



と対応させることができる．

超幾何関数の合流（Gelfand, 木村弘信)，並びに Painlevé 方程式の反自己双対 Yang–Mills 方程式からの導出 (Mason–Woodhouse, 村田嘉弘）において，これらの Young 図が並行して現れる．特異点の個数 n を増やして一般化したものを **Garnier 系**と言うが，その退化も n の分割によりラベルされる．

Painlevé 方程式とその拡張に関する研究は，可積分系との関係の深まりと共に，今後もますます進展するものと期待される．

参考文献

1) C.G.J. Jacobi, *Crelle J.* **22** (1841), 360–371.
2) M. Jimbo, T. Miwa, "Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983), 943–1001.
3) 日本語の詳しい解説は，野海正俊，『パンルヴェ方程式—対称性からの入門—』朝倉書店 2000.
4) 津田照久，日本数学会 2006 年度年会（3 月，中央大学）無限可積分系セッション講演．

（やまだ・やすひこ，神戸大学理学部）

ヤング図形と組合せ論・表現論

有木　進

1. はじめに

数学の分野の中には，代数・幾何・解析のすべての手法を使う横断的な研究を特徴とする分野がいくつかある．数論はもちろんその代表的な例であるが，表現論もそのような分野の代表格である．手法が多岐にわたるため，各研究者は自分の興味のある対象の研究を中心に，ある部分はとても詳しく，他の部分はよりおおざっぱに，というように自己の研究対象の周りに同心円を描くような形で表現論全体に対する基礎知識をもっているのが普通である．どの分野でもそうであるが，一般論の構築と個々の具体例の理解という２つの流れがあり，交互に他方を刺激しつつ数学が進歩してきた．表現論においては，一般線形群に代表されるような古典型の群とそれらに伴う代数系がそのような具体例を提供する．これらの例においては種々の結果がとても具体的な形で記述できるのであるが，もっとも望ましい記述の仕方は，主張が一目でわかるような簡明な組合せ論的な記述である．

ここで，少し付言しておかねばならない．組合せ論的といった場合，そこにはいろいろな立場がある．そして組合せ論的な記述がいつも一目でわかるような簡明なものとは限らない．さらに証明の好みの違いも存在する．例えば，組合せ論の研究者は２つの集合の間の全単射を構成することにより，種々の表現論的な等式の証明をすることを好むのであるが，表現論の研究者にとっては表現論の標準的な手法，それは代数的であったり幾何的であったりするわけだが，による証明のほうが短い証明でかつ証明のアイデアが一目でわかる，ということがよくある．しかも，古典型を扱う場合，一般論で使われる議論の多くを線形代数等の初等的議論で代用できる．そこで，我々の立場としては，記述の明解さを求めて組合せ論を言語として用いるが，命題の記述・証明にあたっては必ずしも組合せ論にこだわらず，むしろ表現論的に自然で初等的でもある記述や証明を好む，となる．そして，このような表現論の研究者の趣味にも合致し，研究者の必須の基本用語となっているのが，ヤング図形であり，また Kazhdan–Lusztig 多項式，柏原クリスタル等々なのである．

この記事ではヤング図形の現れる種々の表現論を概観しようと思う．

2. Lie 群・代数群の表現論とヤング図形

$G = GL_n(\mathbb{C})$ の既約有限次元正則表現の分類を考えよう．これはコンパクト簡約 Lie 群 $U_n(\mathbb{C})$ の既約ユニタリ表現の分類と同じで，Cartan–Weyl の最高ウェイト理論によって統制される．支配的ウェイトとは，今の場合

$$\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$$

であって $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たすものである．λ をラベルにもつ既約表現を求めるには Borel–Weil

の定理を用いればよい．B を可逆な下三角行列の全体とする．（ルート系は上三角行列が正ルートになるようにとる．）支配的ウェイト λ は

$$b = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \quad \mapsto \quad b^\lambda := b_{11}^{\lambda_1}\cdots b_{nn}^{\lambda_n}$$

により B の 1 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を定義し，さらに $Fl = G/B$ 上の線束 $\mathcal{L}_\lambda := G \overset{B}{\times} \mathbb{C}_\lambda$ を定める．そこで，$H^i(\lambda) = H^i(Fl, \mathcal{L}_\lambda)$ と定義すれば

$$V(\lambda) := H^0(-w_0\lambda)^* \simeq H^{n(n-1)/2}(w_0\lambda - 2\rho)$$

が λ を最高ウェイトにもつ既約表現を与える．

ここで，$w_0\lambda = (\lambda_n, \cdots, \lambda_1)$ かつ ρ はいわゆる正ルートの和の半分で今は

$$\rho = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \cdots, \frac{-n+1}{2}\right)$$

である．また，肩の $*$ は双対表現を意味する．$V(\lambda)$ を Weyl 加群と呼ぶ．G の関数環

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}\left[\{X_{ij}\}_{1\le i,j\le n}, \frac{1}{\det(X)}\right]$$

を用いて誘導関手 ind を定義すれば $R^i\,\mathrm{ind}(\mathbb{C}_\lambda) = H^i(\lambda)$ であるから，誘導関手を用いれば Borel–Weil 理論を量子群に対しても考えられ，量子 Weyl 加群 $V_q(\lambda)$ も存在する．

これが一般論を基礎とした話であるが，今の場合この話は単なる線形代数であることを説明しよう．

$$H^0(\lambda) = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = b^{-\lambda}f(g),\ b \in B\}$$

にまず注意する．$g = (g_1, \cdots, g_n)$ と書くと

$$gb = (g_1b_{11} + \cdots + g_nb_{n1}, \cdots, g_nb_{nn})$$

となるから，$1 \le i \le n$ に対し

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} X_{ii} & \cdots & X_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{ni} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

とおくと，$\Delta_i(gb) = (b_{ii}\cdots b_{nn})\Delta_i(g)$．ゆえに，

$$f^{\mathrm{hw}} = \Delta_1^{-\lambda_1}\Delta_2^{\lambda_1-\lambda_2}\cdots\Delta_n^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}$$

とすると，$f^{\mathrm{hw}} \in H^0(\lambda)$ で，可逆な上三角行列を b とすると $b\cdot f^{\mathrm{hw}} = b^\lambda f^{\mathrm{hw}}$ と作用する．つまり業界用語で言えば，$H^0(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ．これで λ を最高ウェイトにもつ既約加群が得られた．$H^0(\lambda)$ を Schur 加群と呼ぶ．

今は $\mathbb{C}$ で考えているので既約加群が得られたが，正標数の代数閉体にすると Schur 加群は既約ではなく，既約加群を商として得るという記述のためには双対加群を考えることになる．$H^0(\lambda)$ の最高ウェイトは λ だから最低ウェイトは $w_0\lambda$ である．よって，$H^0(\lambda)^*$ は $-w_0\lambda$ を最高ウェイトにもつ．これが Weyl 加群の定義の由来である．$\mathbb{C}$ 上で考える限り Schur 加群と Weyl 加群の間に違いはないが，正標数の代数閉体上で考えると一般には $H^0(\lambda) \not\simeq V(\lambda)$ である．

f^{hw} に G を作用させればわかるように，$G = GL_n(\mathbb{C})$ の場合 Weyl 加群は小行列式の積を基底とする加群（の双対）として構成できる．実際，$\omega = (1, \cdots, 1)$ とすると $V(\lambda + m\omega) = \det^{\otimes m} \otimes V(\lambda)$ であるから，λ として $\lambda_n \ge 0$ を満たすものを考えれば十分であり，$\lambda_n \ge 0$ であれば λ を i 番目の行の長さが λ_i のヤング図形と思うことができるので以下そう思うことにしよう．すると，簡単な規則により λ の各半標準盤に小行列式の積を対応させることができ，Schur 加群，Weyl 加群の基底が得られる．量子群の場合も，関数環，行列式等をすべて q-変形することにより $V_q(\lambda)$ を同様に扱うことができる．

またこの Weyl 加群の構成法はモジュラー表現を考えるときも有用である[1]．

こうして，ヤング図形を使った組合せ論的表現論が花開くこととなった．

ここまでの説明では加群の構成に焦点を当てたが，極大トーラス（可逆な対角行列の全体）を同時対角化する基底を考え，その基底元の parametrization と指標だけに注目すれば，より純粋にヤング図形の組合せ論で遊ぶことができる．例えば $V(\lambda)$ の指標を考えると，半標準盤から定まる単項式（x^T と書く）の和として Schur 多項式 $s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \sum_T x^T$ が自然に現れる[5,8]．x^T は T から定まる基底元のウェイトに他ならず，T 中に現れる $i \in \{1, \cdots, n\}$ の重複度を $m_i(T)$

と書けば $x^T = x_1^{m_1(T)} \cdots x_n^{m_n(T)}$ である．

例 1　例えば T が

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

ならば $x^T = x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5$ である．

そして，Cauchy 恒等式

$$\prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

が $\mathbb{C}[Mat_n(\mathbb{C})] \simeq \oplus_\lambda \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V(\lambda))$ の両側加群としての分解を指標公式として記述したものであることも読者の多くがすでにご存知であろう．(λ は $\lambda_n \geq 0$ を満たすもの，つまりヤング図形と対応するものの全体を走る．)

以上の理論は半標準盤の亜種を定義することにより他の古典型にも拡張されており，多くの成功を収めている．

3. 対称群の表現論とヤング図形

前節で述べたように Weyl 加群は小行列式を用いて構成できるが，もっと強く，$G = GL_n(\mathbb{C})$ の表現論は対称群の表現論から完全に復元できる．とくに Weyl 加群を対称群の表現論の範疇で構成できる．

$\mathbb{C}[Mat_n(\mathbb{C})]$ を $A(n)$ と略記し，次数ごとに考えて $A(n) = \oplus_{r \geq 0} A(n,r)$ と書こう．前節での f^{hw} の議論より $|\lambda| = r$ ならば Schur 加群 $H^0(-w_0\lambda)$ が $A(n,r)$ 中に実現されていることがわかる．Schur 加群が $GL_n(\mathbb{C})$-加群ということは関数環の言葉で言えば，$A(n)$-余加群ということに他ならないが，$A(n,r)$ 中に実現されているので $A(n,r)$-余加群になる．ここで，$A(n)$ は

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}$$

により余代数であり，$A(n,r)$ はその部分余代数である．$S(n,r) := A(n,r)^*$ を Schur 代数と呼ぶ．

$|\lambda| = r$ とすると $H^0(-w_0\lambda)$ は $A(n,r)$-余加群なので $S(n,r)$-加群になる．その双対加群 $V(\lambda)$ も $S(n,r)$-加群であるから，Schur 代数の表現論を用いて構成できると期待されるが，実際ヤング図形と対称群の表現論を用いて議論が進む．鍵になるのは Schur–Weyl 相互律である．

$V = \mathbb{C}^n$ を $GL_n(\mathbb{C})$ の定義表現とする．$V^{\otimes r}$ は $(S(n,r), S_r)$-両側加群になる．$r \leq n$ ならば，$A(n,r)$ の部分空間で $X_{i_1 1} \cdots X_{i_r r}$ の形の単項式の張る部分空間を考えると，$\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を標準基底として

$$X_{i_1 1} \cdots X_{i_r r} \quad \leftrightarrow \quad e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \in V^{\otimes r}$$

により $V^{\otimes r}$ と同一視できることにも注意しておく．

$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = r$ とし，S_r の Young 部分群

$$S_\mu = S_{\mu_1} \times S_{\mu_2} \times \cdots \times S_{\mu_n}$$

の単位表現の S_r への誘導加群を M^μ とすれば，S_r-加群として $V^{\otimes r} \simeq \oplus M^\mu$ であり，

$$S(n,r) = \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}_{S_r}(M^\mu, M^\nu)$$

となる．これが Schur–Weyl 相互律であり，Schur 代数が対称群の表現論だけを用いて扱えることを示している．さて Weyl 加群に戻ろう．

同じヤング図形に数字を書き込んだ半標準盤の対 (S,T) に対し対称群の群環の元 m_{ST} を具体的に構成し，m_{ST} による掛け算を用いて $\mathrm{Hom}_{S_r}(M^\mu, M^\nu)$ の元を定義することができる．ただし，$x^S = x^\nu, x^T = x^\mu$ である．こうして $\varphi_{ST} \in S(n,r)$ が定義され，φ_{ST} の全体は $S(n,r)$ の基底をなす．

そして，T を固定して S を λ の半標準盤全体を動かせば，$S(n,r)$ の左正則加群の subquotient として Weyl 加群 $V(\lambda)$ が構成できるのである．

対称群の群環はベキ等元 $e \in S(n,n)$ を用いて $eS(n,n)e$ と表示できる．この事実の反映として，対称群の群環の場合も Schur 代数と平行した理論構成ができる．つまり，同じヤング図形に数字を書き込んだ標準盤の対 (s,t) に対し，元 m_{st} を構成

することができ，t を固定して s を λ の標準盤全体を動かすことにより，対称群の群環の左正則加群の subquotient として Specht 加群 $S^\lambda = eV(\lambda)$ が構成できる．ここまでの議論において基礎体が $\mathbb{C}$ であることは本質的ではない．

基礎体が $\mathbb{C}$ ではなく正標数の代数閉体としよう．このとき，Weyl 加群は既約ではないがただ1つの極大真部分加群をもった．Specht 加群の場合はそうとは限らない．しかし，S^λ 上に双 1 次形式が存在して，双 1 次形式の根基が全体に一致しないときには $D^\lambda := S^\lambda / \operatorname{Rad} S^\lambda$ が既約になる．さらに，このような D^λ の全体が既約表現の分類を与える．これを Specht 加群理論と言う．

これ以上具体的に述べられないのが残念であるがヤング図形が大活躍している様子は察していただけると思う．

対称群は 2 重被覆群をもち，対称群の射影表現はこの 2 重被覆群の線形表現に lift できる．対称群の線形化できない射影表現を 2 重被覆群に lift したものを対称群のスピン表現と言う．これらの表現もヤング図形の亜種（shifted ヤング図形）を用いた扱いができる[7]．

4. A 型 Hecke 代数の表現論とヤング図形

$GL_n(\mathbb{C})$ の代わりに $GL_n(\mathbb{F}_q)$ を考えると有限群が得られる．正標数の代数閉体上の簡約群 G の Frobenius 固定点 G^F の群環 $\mathbb{C}G^F$ の既約表現の分類は Lusztig により完成された．群環の係数体として $\mathbb{C}$ の代わりに（q を割りきらない）正標数の代数閉体を考える場合のモジュラー既約表現の分類についても Broué 他によりきれいな描像が得られている．$G^F = GL_n(\mathbb{F}_q)$ の場合はとくに扱いやすく，Harish-Chandra 系列を用いて分類することができる．これが Dipper による分類である．G^F の放物型部分群，つまり $n = n_1 + \cdots + n_r$ に応じて $n \times n$ 行列をブロック行列に分割したとき，下半ブロック三角行列の全体がなす G^F の部分群を P^F とし，ブロック対角行列の全体を L^F とする．L^F の既約 cuspidal 加群 M の Harish-Chandra 誘導を $R^G_{L\subset P}(M)$ と書く．このとき，$\mathrm{End}_{G^F}(R^G_{L\subset P}(M))$ は A 型 Hecke 代数のテンソル積に同型になる．

A 型 Hecke 代数とは対称群の群環の q-変形で，r 次対称群の変形なら $r!$ 次元の有限次元代数の one parameter family である．具体的には，生成元 $T_1, \cdots, T_{r-1}$ とそれらの生成元の間の基本関係式

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0 \ (\forall i),$$
$$T_iT_j = T_jT_i \quad (j \neq i \pm 1),$$
$$T_iT_jT_i = T_jT_iT_j \quad (j = i \pm 1)$$

で定義される．Dipper の定理により，$R^G_{L\subset P}(M)$ の商として得られる既約 G-加群の同型類の集合とこの Hecke 代数のテンソル積の既約加群の同型類の集合に自然な全単射が存在し，モジュラー既約表現の分類は A 型 Hecke 代数の既約表現の分類に帰着される．A 型 Hecke 代数は対称群の q-変形であるから，やはり Specht 加群理論を構成することにより既約表現の分類ができる．

A 型 Hecke 代数を $\mathcal{H}_r$ と書く．対称群の場合と同様に考えて Young 部分代数 $\mathcal{H}_\mu$ の index 表現（対称群の単位表現に対応する表現）の誘導加群として M_q^μ を定義する．このとき，

$$S_q(n,r) = \mathrm{End}_{\mathcal{H}_r}(\oplus M_q^\mu)$$

を q-Schur 代数と呼ぶ．Schur 代数の理論の自然な q-変形として Dipper と James は q-Schur–Weyl 相互律を示した．これは本質的に Jimbo 相互律に他ならない．筆者はこれを我々の分野の佐藤 school の数学との第 1 種接近遭遇と呼んでいる．第 2 種接近遭遇も説明しよう．

佐藤 school のソリトンの研究において，Schur 関数を基底とする空間（Fock 空間）が自然に現れた．これはヤング図形の全体を基底とする無限次元ベクトル空間であるが，実は q-Schur 代数の加群圏の Grothendieck 群の直和

$$\bigoplus_{n\geq 0} G_0(S_q(n,n)\text{-}mod)$$

がこの Fock 空間と同一視される．$q \neq 1$ が 1 の原始 e 乗根としよう．このとき，Fock 空間の真空ベクトルが生成する $\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)})$-部分加群が

$$\bigoplus_{n \geq 0} G_0(\mathcal{H}_n\text{-}mod)$$

と同一視される．こうして，q-Schur 代数，Hecke 代数の研究において（q-変形）Fock 空間，柏原–Lusztig の標準基底，結晶基底が日常的な用語となった．これが佐藤 school の数学との第 2 種接近遭遇であり，90 年代に大きな進歩をする原動力となった．

5. Brauer 代数の表現論とヤング図形

代数群として，$SO_n(\mathbb{C})$ や $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ を考えると，やはりテンソル空間 $V^{\otimes r}$ 上に Schur–Weyl 相互律が成立するが，そこには対称群の代わりに Brauer 代数が現れる．そして，Brauer 代数の表現論において標準盤の役割を果たすのが updown 標準盤である．まず，標準盤はヤング図形の増加列と思えることに注意しよう．例えば

1	3	4
2	5	

ならば

$$\emptyset \subset (1) \subset (1^2) \subset (2,1) \subset (3,1) \subset (3,2)$$

である．ここで，箱が 1 つずつ増えるだけではなく，1 つ増えるか 1 つ減るかのどちらも許すことにしよう．これが updown 標準盤である．$\emptyset$ からスタートして λ で終わる updown 標準盤を λ の updown 標準盤と言う．例えば，$r=3$ で $\lambda=(1)$ ならば λ の updown 標準盤は

$$\emptyset \subset (1) \subset (2) \supset \lambda, \quad \emptyset \subset (1) \subset (1^2) \supset \lambda,$$
$$\emptyset \subset (1) \supset \emptyset \subset \lambda$$

の 3 つである．詳しく紹介する余裕はないが，Brauer 代数の既約表現は，$|\lambda| = r - 2f$ $(f \geq 0)$ として，λ の updown 標準盤を基底とする空間の上に構成できる．

6. B 型 Hecke 代数の表現論とヤング図形

$GL_n(\mathbb{F}_q)$ 以外の古典型 G^F の既約表現の分類を考えると今度は B 型 Hecke 代数の出番となる．Hecke 代数は A 型，B 型ともに A 型 affine Hecke 代数の巡回商であるから，B 型 Hecke 代数に対しても A 型と同じ理論が構成でき，ここではヤング図形の亜種としてヤング図形のペア（bipartition）が使われることになる．

この理論はより一般に複素鏡映群 $G(m,1,n)$ に付随する Hecke 代数の理論に一般化される．

7. 柏原クリスタル

今まで説明してきたように，ヤング図形と標準盤，そしてその種々の亜種が古典型の表現論に現れる．これらの理論と量子群との関係が明らかになることによって，今まで説明してきた組合せ論的表現論の世界は柏原クリスタルによる記述という，統一的な枠組みを与えられることとなった．そして，A 型以外への拡張についてもはっきりとした指針をもって考えられるようになった．柏原と中島（俊樹）の理論[3]が代表例である．ただし，Brauer 代数に関してはまだまだで，よりよい理解が求められている．

8. affine 量子包絡環とヤング図形

目を affine 型量子群に向けると，そこには中島箙多様体の世界が存在し，やはり柏原クリスタルによる組合せ論的記述や，ヤング図形の組による記述が存在する．また，ヤング図形を発展させたヤング壁[2]の組合せ論も存在する．実はこれらの理論も今までの話と全く無関係というわけではないが，説明は割愛することとしよう．

9. そして有理 DAHA（Double Affine Hecke Algebra）へ

q-Schur 代数は quasi–hereditary 代数の代表的

な例であり，その加群圏は Cline, Parshall, Scott の意味での最高ウェイト圏になっている．上で述べたように，A 型 Hecke 代数は $eS_q(n,n)e$ という記述をもつ．このような関係にあるとき $S_q(n,n)$ は $\mathcal{H}_n$ の highest weight cover と言う．きちんとした定義を与えておこう．

定義 1 quasi–hereditary 代数 A とその射影加群 P が与えられたとすると，$B = \mathrm{End}_A(P)^{OP}$ に対し $\mathrm{Hom}_A(P, A)$ は B-加群かつ A-加群である．自然な代数準同型

$$A \quad \to \quad \mathrm{End}_B(\mathrm{Hom}_A(P, A))$$

が同型のとき，A-*mod* は B-*mod* の highest weight cover であると言う．

これは，関手 $F = \mathrm{Hom}_A(P, -)$ を射影 A-加群のなす A-*mod* の充満部分圏 A-*proj* に制限すると fully faithful，と言っても同じである．

$W = S_n$ を対称群とする．定義は述べないが，W に付随して有理 Cherednik 代数という $\mathbb{C}$-代数が定義され，圏 $\mathcal{O}$ という BGG 圏の類似物が定義できる．$\mathcal{O}$ は最高ウェイト圏であり，関手

$$KZ : \mathcal{O} \quad \to \quad \mathcal{H}_n\text{-}mod$$

が存在する．ここで, Hecke 代数と有理 Cherednik 代数のパラメータは互いに exp と log の関係で結ばれている．Rouquier の定理によれば, $q \neq -1$ ならば $\mathcal{O} \simeq S_q(n,n)$-*mod* であり, $eS_q(n,n)e = \mathcal{H}_n$ という記述と両立する．すなわち，この圏同値のもとで KZ 関手は Schur 関手

$$F = \mathrm{Hom}_{S_q(n,n)}(S_q(n,n)e, -)$$

と対応する．こうして，基礎体が $\mathbb{C}$ という特殊性はあるが，q-Schur 代数の理論は有理 Cherednik 代数および，Hecke 代数の highest weight cover の理論の特別な例として新しい解釈が与えられたのである．この分野における発展は始まったばかりであり，さらに多くのヤング図形の表現論が現れると期待されている．

10. 結びに代えて

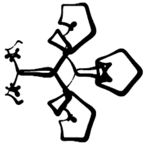
『ヤング図形と組合せ論・表現論』から読者はどれくらいの内容を連想したであろうか．Young 対称子による対称群の既約表現の構成などを連想するというのが多数派であろう．しかし，現代の対称群の表現論において Young 対称子に触れるのはもはや稀である．ちなみに，Young 対称子に関しては Nazarov による新しい取扱いがあって Brauer 代数の Young 対称子などを考えることができる．他に紹介すべき理論も多く，またベキ零軌道の幾何や Schubert calculus, degenerate loci とヤング図形という観点もあり，代数的組合せ論・表現論とも関係が深いが，これらのテーマはより適当な筆者がいると思う．ここまでの解説で既に十分読者のイメージ力を超えた内容を提供できたと期待して，打ち止めとしよう．

参考文献

1) J.A. Green, “Polynomial Representations of $\mathrm{GL_n}$”, LNM 830, Springer, 1980.
2) J. Hong and S.J. Kang, “Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases”, *Amer. Math. Soc.* 2002.
3) M. Kashiwara, “Bases cristallines des groupes quantiques”, *Soc. Math. France*, 2002.
4) 小林俊行『Lie 群と Lie 環 2』岩波書店，1993.
5) I.G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials”, Oxford, 1979.
6) 岡田聡一『古典群の表現論と組合せ論』(上・下) 培風館，2005.
7) B.E. Sagan, “The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions”, Springer–Verlag, 2001.
8) R.P. Stanley, “Enumerative Combinatorics vol.2”, Cambridge, 1999.

(ありき・すすむ，京都大学数理解析研究所)

ベーテ仮説とヤング図形



国場　敦夫

1. はじめに

今日 2006 年 7 月 2 日をこの原稿の執筆開始の日と決めていた．ハンス・ベーテ（Hans Albrecht Bethe）の生誕百年の日である．20 世紀を代表する物理学者の一人であるベーテがハイゼンベルグ鎖の論文[1)]を発表したのは 1931 年であった．それは量子多体問題の最初の厳密解であると同時に，今日量子可積分系と呼ばれている分野が誕生した瞬間とも言える．原論文に “Wir machen den Ansatz” として波動関数が導入されているせいか，その方法は Bethe ansatz[2)]として以後広く普及し，今日でも威力を発揮し続けている．

ベーテの方法は 1 次元量子系のハミルトニアン，あるいは 2 次元古典スピン系の転送行列に対し，その固有値問題の解を，ある特徴的なフォーマットで与え，エネルギースペクトルや相関関数など様々な物理量の解析を可能にする[3~5)]．原論文の定式化は，その後多くの研究により発展し，「代数的」，「解析的」，「熱力学的」など，様々な形態のベーテ仮説へと進化を遂げて現在に至っている．その変貌ぶりは著しい．実際，ベーテが自ら延べ 10 時間以上にわたり様々な回想を矍鑠と語る映像はウェブサイト[6)]で見ることができるが，その第 47 話で，最近 Bethe ansatz として聴いたセミナーが，自分の元々の仕事とどう関係しているのか，“slightest idea” もなかったと述べている．

2. 組合せベーテ仮説

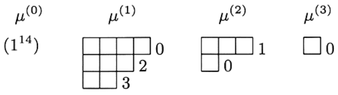
本稿で紹介するのは種々のベーテ仮説の中でも最も風変わりなヴァージョンで，いわば「ベーテ仮説のなれの果て」とでも呼ぶべきお話である．ヤング図やその拡張がたくさん登場するので著者らはこれを「組合せベーテ仮説」と呼んでいる．組合せベーテ仮説を創始したのはケロフ，キリロフ，レシェティヒン（Kerov–Kirillov–Reshetikhin）[7, 8)]であり，1980 年代中期のことである．その核心は，2 つの組合せ論的対象物の 1 対 1 対応（KKR 全単射）

$$\{\text{highest paths}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{rigged configurations}\} \tag{1}$$

にある[9)]．これらは数学的に完璧に定義・証明される概念・定理であるが[10)]，本節では簡単な例でその雰囲気を紹介するに留め，ベーテ仮説からの由来について説明しよう．

正整数 n を固定する．path とは文字 $1, 2, \cdots, n$ の有限列 $b_1 b_2 \cdots b_L$ であり，それが highest とは，任意の左側部分 $b_1 b_2 \cdots b_k \ (1 \le k \le L)$ における各文字の登場回数が $\sharp 1 \ge \sharp 2 \ge \cdots \ge \sharp n$ を満たすものを言う．例えば $p = 11112221322433$ は長さ $L = 14$ の highest path である $(n = 4)$．

KKR 全単射により上の highest path p には以下の rigged configuration が対応する．



n 個のヤング図 $\mu^{(0)}, \cdots, \mu^{(n-1)}$ が並んでいる．特に $\mu^{(0)}$ は path の長さ L により (1^L) と指定される．それ以外のヤング図 $\mu^{(a)} \ (1 \le a \le n-1)$ の決まり方は非自明である．$\mu^{(a)}$ において，その長さ j の行の個数を $m_j^{(a)}$ とし，$p_j^{(a)} =$

$L\delta_{a,1} - \sum_{b=1}^{n-1} C_{a,b} \sum_{k\geq 1} \min(j,k) m_k^{(b)}$ とおく．ここで $(C_{a,b})_{1\leq a,b\leq n-1}$ は $sl(n)$ のカルタン行列である．このときすべての a, j について $p_j^{(a)} \geq 0$ となる場合に組 $(\mu^{(0)}, \cdots, \mu^{(n-1)})$ を configuration と言う．

$\mu^{(0)}$ 以外のヤング図の各行には整数が割り振られている．これを rigging と呼ぶ．$\mu^{(a)}$ の長さ j の行に割り振られた rigging を上から順に $r_1, r_2, \cdots, r_{m_j^{(a)}}$ とし，これらが条件

$$0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{m_j^{(a)}} \leq p_j^{(a)} \tag{2}$$

を満たす場合に rigged configuration と言い，$(\mu, r) = (\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, r^{(1)}), \cdots, (\mu^{(n-1)}, r^{(n-1)}))$ と書く[11]．

不思議な定義が続いたが，これらは1次元 $sl(n)$ ハイゼンベルグ模型のベーテ仮説に由来している．$sl(n)$ の基本表現を $V = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ とし，L 重テンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ に働くハミルトニアン $H = \sum_{k=1}^{L}(P_k - 1)$ を対角化せよ，という問題である．ここで，P_k は k 番目と $k+1$ 番目のサイトのスピンを入れ換える演算子 $P_k(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$ であり，周期的境界条件を仮定する．

ベーテ仮説によると，H の対角化は以下の方程式を解くことに帰着する．

$$\left(\frac{u_j^{(a)} + i\delta_{a,1}}{u_j^{(a)} - i\delta_{a,1}}\right)^L = -\prod_{b=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{N_b} \frac{u_j^{(a)} - u_k^{(b)} + iC_{a,b}}{u_j^{(a)} - u_k^{(b)} - iC_{a,b}}. \tag{3}$$

これは未知数 $\{u_j^{(a)} \mid 1 \leq a \leq n-1, 1 \leq j \leq N_a\}$ についての連立方程式であり，ベーテ方程式と呼ばれる．ハミルトニアンは $sl(n)$ 対称性 $[H, sl(n)] = 0$ を持つので，ウェイトを保存する．$N_1, \cdots, N_{n-1}$ はこれを指定する非負整数（後述）であり，対応する $V \otimes \cdots \otimes V$ の部分空間における H の固有値は $\sum_{j=1}^{N_1} \frac{-4}{(u_j^{(1)})^2 + 1}$ で与えられる．固有ベクトルも根 $\{u_j^{(a)}\}$ から定められ，ベーテベクトルと呼ばれる．ベーテベクトルは $sl(n)$ について最高ウェイトベクトルになる[12]．

以上簡約すると，今の場合ベーテ仮説とは，ベーテ方程式 (3) の根からスピン鎖の状態空間 $V \otimes \cdots \otimes V$ における $sl(n)$ 最高ウェイトベクトルを作り出す処方箋である．

KKR 全単射 (1) はこれの組合せ論的な類似になっている．最高ウェイトベクトルに相当する対象物が highest path であり，ベーテ方程式の根に相当する対象物が rigged configuration である．後者についてもう少し説明しよう．一般にベーテ方程式 (3) を解析的に解くことはできないが，その根 $\{u_j^{(a)}\}$ を各 a ごとに複素平面上にプロットすると近似的に或るパターンをなす．それは $x + 3i, x + i, x - i, x - 3i \, (x \in \mathbb{R})$ のように実軸について対称に間隔 $2i$ で連なった「ストリング」の集団という様相を呈する．これを模式化したのが configuration であり，ヤング図 $\mu^{(a)}$ の各升目は1つのベーテ根 $u_j^{(a)}$ に，各行が1本のストリングに対応する．$m_j^{(a)}$ は長さ j のストリングの本数であり，$\mu^{(a)}$ の升目の総数 $\sum_{j\geq 1} j m_j^{(a)}$ は (3) の N_a に等しい．一方 rigging はストリングの「位置」を指定する．先の例の $\mu^{(1)}$ では，$u_1^{(1)}, \cdots, u_9^{(1)}$ が長さ 4, 3, 2 のストリングを形成し，それらが「位置」0, 2, 3 にあるような根という気持ちである[13]．物理的には各ベーテ根はマグノンに，ストリングはその束縛状態に対応する．

3. フェルミ公式

rigged configuration と highest path がそれぞれベーテ根とベーテベクトルの組合せ論的類似とするならば，両者が1対1対応するという KKR 全単射 (1) はベーテ仮説の完全性の類似に相当する．このことから麗しい数え上げ公式が従う．

highest path はテンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ の既約成分と1対1対応するので，その数は既約分解の多重度と一致する．最高ウェイトがヤング図 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ で指定される $sl(n)$ の既約表現 $V(\lambda)$ の多重度 $[V^{\otimes L} : V(\lambda)]$ は，λ 上の文字 $1, 2, \cdots, L$ からなる標準盤[14] の個数に等しく，Kostka 数 $K_{\lambda,(1^L)}$ とも呼ばれる[15]．特に $n = 2$ の場合は $\binom{L}{\lambda_1 - \lambda_2} - \binom{L}{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}$ である．一方ストリングの本数 $m = \{m_j^{(a)}\}$ で指定される rigged configuration の数は (2) により

$$M(m) = \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{j\geq 1} \binom{p_j^{(a)} + m_j^{(a)}}{m_j^{(a)}} \tag{4}$$

となる．従って (1) において $V(\lambda)$ に対応する部分集合の元を数えると，等式

$$[V^{\otimes L} : V(\lambda)] = \sum_m M(m) \tag{5}$$

が従う．ここで，右辺の和は $\mu^{(a)}$ の升目の総数 $\sum_{j\geq 1} j m_j^{(a)}$ が $\lambda_{a+1} + \lambda_{a+2} + \cdots + \lambda_n$ に等しい configuration 全体にわたる．

ストリング仮説を導入し，等式 (5) を $n=2$ の場合に初めて証明したのは他ならぬベーテその人であった．ケロフ，キリロフ，レシェティヒンが rigged configuration を発明し，等式 (5) やその拡張を全単射の組合せ論に昇華させたのはそれから半世紀ほど後のことである．

KKR 理論は，等式 (5) に自然な q 類似が存在することを明るみにした．

$$q^{-\frac{L(L-1)}{2}} K_{\lambda,(1^L)}(q) = \sum_{m} M_q(m). \qquad (6)$$

ここで $K_{\lambda,(1^L)}(q)$ は Kostka–Foulkes 多項式[15] である．一方 $M_q(m)$ は，rigged configuration (μ, r) に対するハイゼンベルグ鎖の「運動量」 $c(\mu, r)$ の rigging についての母関数

$$\sum_r q^{c(\mu,r)} = q^{c(\mu,0)} \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{j \geq 1} \begin{bmatrix} p_j^{(a)} + m_j^{(a)} \\ m_j^{(a)} \end{bmatrix}$$

である．ここで $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{b} \frac{1-q^{a+1-j}}{1-q^j}$ は q-2 項係数．また $c(\mu, r)$ は charge 関数とも呼ばれ，

$$c(\mu, r) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{n-1} C_{a,b} \min(\mu^{(a)}, \mu^{(b)}) - \min(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}) + \sum_{a=1}^{n-1} |r^{(a)}| \qquad (7)$$

で与えられる[16]．ただし，自然数列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_m)$ について，$\min(\lambda, \nu) = \sum_{i,j} \min(\lambda_i, \nu_j)$, $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ という記号を用いた．

rigging についての母関数が q-2 項係数になるのは条件 (2) によるが，その起源はベーテ方程式の重根を禁じる選択則にある[17]．分岐係数の公式 (5) およびその q 類似 (6) は，このようにベーテ根があたかもフェルミ粒子のような排他性を持つことを反映していることからフェルミ公式と呼ばれる．任意のアフィン・リー環においてフェルミ公式予想が定式化されている[18]．

4. 箱玉系の逆散乱法

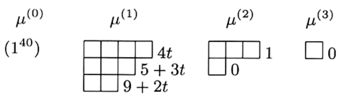
KKR 全単射はフェルミ公式の証明の核心でありながら，その定義は純粋に組合せ論的なアルゴリズムによるもので，表現論的な起源は永年謎であった．それが見出されたのはごく最近のことで，箱玉系の逆散乱形式に通じることが分かってきている[19,20]．

箱玉系とは量子群対称性をもつ 1 次元可積分セルオートマトン[22]で，近年ソリトン方程式の超離散化[23]や結晶基底の理論[24]による研究が進んでいる．時間発展の例をあげよう．

```
0 : 1111222211113321431111111111111111111111
1 : 1111111122221113324311111111111111111111
2 : 1111111111112222113243311111111111111111
3 : 1111111111111111222132243311111111111111
4 : 1111111111111111111221132243321111111111
5 : 1111111111111111111112211132214332111111
6 : 1111111111111111111111122111132211433211
```

ここで，最も左の数字は時刻 $(0 \leq t \leq 6)$ である．各時刻の状態とは，空箱か，玉が 1 つ入った箱が一列に並んだものである．1 が空箱を表す．玉はこの例では 3 色あり，それを 2, 3, 4 で区別している．時間発展の規則は $T = K_2K_3K_4$ と与えられる．ここで K_i は色 i の玉をすべて一度ずつ動かす操作である．そのやり方は，左の玉から順に自分より右側の最隣接空箱に移動せよ，というものである．上の例では第 1 行の状態（時刻 $t=0$）を T で時間発展させたものを順次その下にリストしている．初期状態の 2222 は，他の玉の影響がなければ速度 4 でその形状を保って伝播する．332 や 43 も同様で，これらは振幅に等しい速度を持ち，ソリトンとして振る舞う．実際，上の例ではこれら 3 つのソリトンが接近，衝突した後に，再び元の振幅を回復して遠ざかって行く様子が観察される．単独では自由運動するソリトンであるが，衝突により内部自由度を交換して 22, 322, 4332 に変化し，位相のずれを生じている．ダイナミクスの非線形性の反映である．ソリトンの散乱則は Yang–Baxter 関係式[3]を満たし，多体散乱は 2 体散乱に因子化する．

箱玉系の各時刻の状態は path である．特に highest path を時間発展させたものは再び highest になることがわかる．従って，highest path の箱玉時間発展 T は KKR 全単射を介して rigged configuration の時間発展を引き起こす．それはどのような運動だろうか．各時刻 $t\,(0 \leq t \leq 6)$ に対応する rigged configuration を求めると以下のようになる[25]．



この結果は，$\mu^{(1)}$ に割り振られた rigging のみが線

形に発展し，それ以外のデータはすべて保存量であることを意味する．特にヤング図 $\mu^{(1)}=(4,3,2)$ はソリトンの振幅のリストであり，各 rigging の速度は対応するソリトンの振幅=速度に一致する．

実は箱玉系には可換な時間発展の族 $\{T_j^{(a)} \mid 1 \le a \le n-1, j \ge 1\}$ を導入することができ，先の T はその中の一つ $T=T_\infty^{(1)}$ として含まれる．一般化された時間発展 $T_j^{(a)}$ は，$\mu^{(a)}$ の rigging だけを線形に変化させ，それ以外のデータを不変に保つ．

以上をまとめると，KKR 理論は箱玉系の逆散乱形式を与えている．前者におけるストリングは後者におけるソリトンである．rigged configuration は箱玉系の散乱データ，即ち作用・角変数である．configuration（ヤング図の組）は保存量であり，ソリトンの振幅を表す．一方 rigging（整数の組）は線形に時間発展し，ソリトンの位相を与える．highest path から rigged configuration への KKR 写像は作用・角変数への変数分離であり，その逆は逆散乱（Gel'fand–Levitan）写像である．箱玉系の時間発展は角変数の直線運動に変換され，初期値問題が解かれる．

先の (4) で登場した 2 項係数の積 $M(m)$ は，作用変数の値が m で指定された箱玉系の highest 状態の数である．これによりフェルミ公式 (6) は，「箱玉系の highest 状態の分配関数＝ソリトンという励起モードの寄与の総和」という準粒子描像を獲得する．ソリトン同志の反発は選択則 (2) に集約されるが，これはハルデン[26] の意味での一般化された排他律の例となっている．

もともとベーテ仮説は量子可積分系の解法である．それをソリトン方程式の逆散乱法の量子化という観点から捉えたのがファデエフらレニングラード学派による量子逆散乱法[4,12]であった．従って，組合せベーテ仮説は超離散ソリトン系の逆散乱法を与え，初期値問題を解くだろうと期待するのは自然なことである．KKR 理論は誕生からほぼ 20 年を経て箱玉系に巡り会い，実際その任務に真価を発揮したのである．

5. KKR 全単射と頂点作用素

では KKR 全単射 (1) とは具体的にどんなアルゴリズムであろうか．オリジナルな組合せ論的手続きについては文献 7, 8, 10) に譲り，ここでは rigged configuration から highest path を作り出す表現論的方法[20,21]のアイデアを紹介しよう．鍵となるのはランクに関する入れ子構造 $sl(n) \supset sl(n-1) \supset \cdots \supset sl(1)$ である[27]．まず文字 n だけからなる自明な $sl(1)$ path $p^{(n-1)}$ から出発し，次に文字 $n-1, n$ からなる $sl(2)$ path $p^{(n-2)}$ を作り，… という具合に徐々に path をふやかしながら進み，最終的に $1, 2, \cdots, n$ からなる $sl(n)$ の highest path $p^{(0)}$ ができ上がる．これが KKR 写像の像となる．途中の path $p^{(a)}$ は，rigged configuration のヤング図 $\mu^{(a)}$ の各行に文字 $a+1, a+2, \cdots, n$ を埋めて作った準標準盤を並べたもの[28]となる．$p^{(a)}$ を $p^{(a-1)}$ にふやかすには，$p^{(a)}$ を散乱データに昇格させ，文字 a だけの真空状態へ「頂点作用素」で打ち込んでやればよい．この操作を $\Psi^{(a)}$ と書くと以上の構成法は

$$p^{(a)} = \Psi^{(a+1)} \circ \Psi^{(a+2)} \circ \cdots \circ \Psi^{(n-1)}(p^{(n-1)}) \tag{8}$$

と定式化される．

2 節の例 $p = p^{(0)} = 11112221322433, (n=4)$ では次のように定められる．

$\mu^{(1)}$

2	2	2	2
2	3	3	
3	4		

$\mu^{(2)}$

3	3	3
4		

$\mu^{(3)}$

4

即ち，準標準盤の枠を略して書けば

$$p^{(3)} = 4,$$
$$p^{(2)} = 333 \otimes 4,$$
$$p^{(1)} = 2222 \otimes 233 \otimes 34$$

と成長して最終的に $\mu^{(0)} = (1^{14})$ 上に $p^{(0)}$ の文字が埋められる．(8) が KKR 写像の正体である．「頂点作用素」$\Psi^{(1)}, \cdots, \Psi^{(n-1)}$ は表現論的な操作により定義されるが，それを完全に記述するには量子群の結晶基底と組合せ R が必要となる．

6. 超離散タウ関数

ここではそれをスキップして最終結果だけを一挙に書き下そう．つまり rigged configuration から highest path への KKR 写像の明示公式[29] を与える．

$(\mu^{(0)}, (\mu^{(1)}, r^{(1)}), \cdots, (\mu^{(n-1)}, r^{(n-1)}))$ を与えられた rigged configuration とする[30]．これから超離散タウ関数を次のように定める．

$$\tau_{k,i}=\min\{c(\nu,s)+|\nu^{(i)}|\} \quad (1\leq i\leq n). \qquad (9)$$

ここで $c(\nu,s)$ とは，フェルミ公式の (7) に現れた charge 関数 $c(\mu,r)$ を

$$(\mu,r)=(\mu^{(0)},(\mu^{(1)},r^{(1)}),\cdots,(\mu^{(n-1)},r^{(n-1)}))$$

を独立変数とする関数としたときの

$$(\nu,s)=(\mu^{(0)}_{[k]},(\nu^{(1)},s^{(1)}),\cdots,(\nu^{(n-1)},s^{(n-1)}))$$

における値である．ただし，$\mu^{(0)}_{[k]}=(\mu^{(0)}_1,\cdots,\mu^{(0)}_k)$．(9) の min は各 a につき $\nu^{(a)}\subseteq\mu^{(a)}$ となる $\nu^{(1)},\cdots,\nu^{(n-1)}$ にわたる．ただし一般に $(\xi_1,\cdots,\xi_l)\subseteq(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ とは左辺が右辺の（空も含む）部分列という意味である．つまり $\nu^{(a)}$ は，ヤング図 $\mu^{(a)}$ から一部の行だけを選択したもの全体をうごく．$s^{(a)}$ は $\nu^{(a)}$ で選ばれた行の rigging からなる整数列である．また $\tau_{k,0}=\tau_{k,n}+|\mu^{(0)}_{[k]}|$ とおき，$|\nu^{(n)}|=0$ と了解する．このとき KKR 全単射の像，highest path を $p^{(0)}=b_1b_2\cdots b_L$ とすると，b_k は $\mu^{(0)}_k$ 階対称テンソル表現の準標準盤であり，次のように決定される．

準標準盤 b_k に登場する文字 i の個数

$$=\tau_{k-1,i}-\tau_{k,i}+\tau_{k,i-1}-\tau_{k-1,i-1}.$$

この結果の背景にはソリトン理論の超離散化がある．$\tau_{k,i}$ は KP 方程式のタウ関数[31]の超離散化になっており，広田型双線形方程式の超離散版を満たす．これまで述べてきたように，KKR 理論は超離散ソリトン系の理論でもあるので，KKR 全単射がタウ関数により記述されるのは不思議ではない．興味深いのは (9) のように charge 関数を介してフェルミ公式とタウ関数が結びついている点である．上記の結果を用いると，箱玉系の一般 N ソリトン解が構成される．

KKR 理論が関与するのは本質的に無限格子上の箱玉系である．これを周期的境界条件の箱玉系に適合するように拡張できるだろうか．それは KKR 理論をシステムサイズ無限大の極限として含み，初期値問題の解を与え，ソリトン方程式の準周期解[32]の超離散化に関与するものと期待される．この目論見は今のところ $sl(2)$ の最も基本的な場合にしか実現していないが，ベーテ根の空間がヤコビ多様体の超離散類似を与え，タウ関数として超離散リーマンテータ関数が現れることが確認されている[33]．

7. むすび

ベーテは論文の最後に，自身の方法を 3 次元系に拡張する予定であると述べている[34]．題目に "I" とあるのはそれを意識したものだったのだろうか．晩年のファインマンがベーテに Bethe ansatz に興味を持ち始めたと言ったら驚いて "What is that ?" と聞き返したという逸話がある．

ベーテは 90 歳を過ぎても創造的で，およそ 40 編もの論文を出版している．昨年（2005 年）3 月 6 日の朝も友人のブラウン氏と電話で論文の打ち合わせをしていた．その際，Bethe ansatz についてヤンからの寄稿[35]があるという知らせを聞いてとても喜んだと言う．穏やかに世を去ったのはその日の夕食時だそうである．残念なことに結局第二論文は書かれることはなかった．

今年（2006 年）はベーテ生誕 100 年と同時にベーテ仮説 75 周年である．いまだ汲めど尽くせぬ泉なのであろうか，これを記念した Journal of Statistical Mechanics の企画[36]にも多くの論文が寄せられている．拙著ながら本稿をもってベーテの追悼文の代わりとさせていただく．

最後に，関連する共同研究をして頂いた尾角正人，坂本玲峰，高木太一郎，竹野内晃，山田泰彦諸氏にこの場を借りて感謝いたします．

注と参考文献

1) H.A. Bethe, Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, *Z. Physik* **71** (1931) 205–231.
2) ベーテの名を初めて冠して Bethe's hypothesis と命名したのは文献 35) によるとヤン兄弟の 1966 年の論文だそうである．Bethe ansatz の訳語としては「ベーテ仮設」も広く用いられる．
3) R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, (1982).
4) V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, (1997).
5) M. Takahashi, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, Cambridge Univ. Press, (1999).
6) http://www.peoplesarchive.com/
7) S.V. Kerov, A.N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group. *J. Soviet Math.* **41** (1988) 916–924.
8) A.N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux.

J. Soviet Math. **41** (1988) 925–955.

9) オリジナルの KKR 全単射は rigged configuration とヤング標準盤の 1 対 1 対応である．後者を更に Robinson–Schensted (RS) 対応で highest path に翻訳したものが (1) である．RS 対応については例えば『加群十話』，堀田良之著，朝倉書店 (1988).

10) A. Schilling, X=M theorem: Fermionic formulas and rigged configurations under review, (math.QA/0512161) は最近のレヴューだが，本稿とは convention が違うので要注意．

11) $0 \leq \forall r_k \leq p_j^{(a)}$ だけを課し，r_k たちを並べ替えたものは同一視する，としてもよい．

12) L.A. Takhtajan, Introduction to algebraic Bethe ansatz, *Lect. Note. Phys.* **242** Springer, Berlin (1985) 175–219.

13) 解がこのようなパターンで記述できるという仮説をストリング仮説と言う．一般には正しくないので「気持ち」としたが，KKR 全単射 (1) はストリング仮説の真偽とは独立に成立する．一方本来の意味での完全性の証明は未解決である．

14) Robinson–Schensted 対応の Q tableau.

15) I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, New York (1995).

16) ここでは $\mu^{(0)} = (1^L)$ であるが，高階スピンのハイゼンベルグ鎖では一般の $\mu^{(0)}$ に付随する Kostka–Foulkes 多項式 $K_{\lambda,\mu^{(0)}}(q)$ が出てくる．

17) さもないとベーテベクトルが 0 になる．「汝，重根を許すなかれ」とはベーテ仮説の掟である．

18) G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, *Prog. in Math. Phys.* **23** (2002) 205–272. 「$X = M$ 予想」とも呼ばれる．X はバクスターの角転送行列の跡で，1 次元状態和．M は本文の $M_q(m)$ に相当し，ベーテ仮説に起源を持つ明示式.

19) 国場敦夫，尾角正人，高木太一郎，山田泰彦，箱玉系の頂点作用素と分配関数，数理解析研講究録，**1302** (2003) 91–107.

20) A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov–Kirillov–Reshetikhin bijection, *Nucl. Phys.* **B740** [PM] (2006) 299–327.

21) R. Sakamoto, Crystal interpretation of Kerov–Kirillov–Reshetikhin bijection II. Proof for $\mathfrak{sl}_n$ Case, (math.QA/0601697).

22) 高橋大輔，薩摩順吉，単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて，日本応用数理学会論文誌 **1** (1991) 41–60.
数学セミナー (2006) 3 月号.

23) 「超離散」，数理科学，No.435, サイエンス社 (1999),『差分と超離散』，広田良吾・高橋大輔著，共立出版 (2003).

24) 柏原正樹，量子群の結晶化，数学，岩波書店 **44** (1992), 330–342.

25) 2 節の例 $p = 11112221322433$ を用いると，時刻 $t = 3$ の状態 q は $q = 1^{12} \cdot p \cdot 1^{14}$ と書ける．この 12 を q の $\mu^{(1)}$ の rigging $12, 14, 15$ から差し引いた $0, 2, 3$ が p の rigging と一致する．

26) F.D.M. Haldane, *"Fractional statistics" in arbitrary dimensions: a generalization of the Pauli principle*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 937–940.

27) (8) 式は nested Bethe ansatz の結晶基底版である．

28) B_k を $sl(n-a)$ の k 階対称テンソル表現のクリスタルとし，$\mu^{(a)} = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$ とすると，$p^{(a)} \in B_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes B_{\mu_l}$ という意味.

29) A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Tau functions in Combinarorial Bethe ansatz, (*math. QA*/0610505).

30) 本節の話は $\mu^{(0)}$ を (1^L) 型に制限せずに任意の自然数列 $\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \cdots, \mu_L^{(0)})$ として通用する．その場合，path とは $B_{\mu_1^{(0)}} \otimes \cdots \otimes B_{\mu_L^{(0)}}$ の元である．本文では簡単のため記号 $\otimes$ を略して 1 行のヤング図 $(\mu_k^{(0)})$ 上の準標準盤の列としている．

31) M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **19** (1983) 943–1001.

32) 『KdV 方程式』田中俊一・伊達悦朗著，紀伊國屋書店 (1979).

33) A. Kuniba and R. Sakamoto: The Bethe ansatz in a periodic box-ball system and the ultradiscrete Riemann theta function, JSTAT[36].

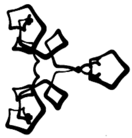
34) 英訳には編者マティス (D.C. Mattis) により "this rash promise has apparently not been kept" という注釈がついている．

35) C.N. Yang and Mo-Lin Ge, Bethe's Hypothesis, in *Hans Bethe and his physics*, ed. by G.E. Brown and C.H. Lee, World Scientific, Singapore (2006) 185–187.

36) http://www.iop.org/EJ/jstat/

（くにば・あつお，東京大学大学院総合文化研究科）

サザーランド模型とヤング図形



加藤　雄介

1. はじめに

数学的に良い性質を持っている対称多項式の性質はヤング図形を用いて視覚的に表すことができる．そのような対称多項式の一つにジャック多項式がある．ジャック多項式は 1 次元量子多体系の一つ，サザーランド模型のエネルギー固有状態を与える．サザーランド模型のエネルギースペクトルと相関関数をヤング図形を用いて分析すると，「分数電荷をもった素励起」という描像が立ち現れる．

2. サザーランド模型[1~4)]

相互作用がある多体系の研究において，単純かつ非自明な性質をもつ量子模型があれば，その物理的性質を掘り下げることに意味はあろう．そのような模型は 1 次元量子系で見出されており，ここではそれをサザーランド模型と呼ぶ．まず原型とも言うべき次のハミルトニアンをもつ 1 次元模型を考える[3,4)]：

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1\le i<j\le N}\frac{g}{(x_i-x_j)^2}. \tag{1}$$

ここでの結合定数 g が無次元であることから，特徴的なスケールがない模型としての性質の良さを (1) に期待できそうである．$N=2$ のとき，ハミルトニアンを重心座標 $(x_1+x_2)/2$ と相対座標 $x=x_1-x_2$ で表すと，相対座標に依存する部分

$$\hat{\mathcal{H}}' = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{g}{x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{x^2}$$

が

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda}{x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda}{x}\right)$$

と因数分解できるので，$x^\lambda = (x_1-x_2)^\lambda$ が (1) の固有関数であることがわかる．一般の N 粒子系においても

$$\Psi_0 = \prod_{i<j}(x_i-x_j)^\lambda \tag{2}$$

が (1) の固有関数であることは，直接計算し $x_{ij} = x_i - x_j$ が満たす関係式

$$\frac{1}{x_{ij}x_{ik}} + \frac{1}{x_{ji}x_{jk}} + \frac{1}{x_{ki}x_{kj}} = 0 \tag{3}$$

を用いることで初等的に確認できる．以下 $g > -1/2$ であるとし λ は正の実数とする．

さて (2) は規格化されていない（2 乗可積分ではない）のが問題で，この系の良い性質を保ちつつ境界条件を課す必要がある．ただし相互作用が長距離なので，ハミルトニアン (1) も相応の変更が必要である．周期 L の周期的境界条件を課すと，ハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm s} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1\le i<j\le N}\frac{(\pi/L)^2\lambda(\lambda-1)}{\sin^2[\pi(x_i-x_j)/L]} \tag{4}$$

で与えられ，

$$\Psi_{\mathrm{g}} = \prod_{i<j} \left(\sin\left[\pi\left(x_i - x_j\right)/L\right]\right)^{\lambda} \tag{5}$$

がその固有関数であることは先と同様な計算からわかる．(4) をサザーランド模型と言う[2)]．粒子間距離が短距離 $|x_i - x_j| \ll L$ になれば，(4), (5) はそれぞれ (1), (2) と一致する．(5) において $x_i - x_j$ が負のとき，多価性が現れるがどの分枝をとっても固有関数である．接続の仕方は粒子の統計性による．例えば粒子がフェルミオンのとき

$$\Psi_{\mathrm{g}}^{\mathrm{F}} = \prod_{i<j} \{|\sin\pi(x_i - x_j)/L|^{\lambda-1} \times \sin\pi(x_i - x_j)/L\} \tag{6}$$

の分枝をとり，ボゾンのとき

$$\Psi_{\mathrm{g}}^{\mathrm{B}} = \prod_{i<j} |\sin\pi(x_i - x_j)/L|^{\lambda} \tag{7}$$

をとればいい．後で議論するように他の固有状態を調べると (5), (6), (7) は基底状態になっていることがわかる．その固有エネルギーを E_{g} とおく．

さて他の固有関数を探すためにヤング図形についての用語を準備する．

3. 分割とヤング図形[3,5,6)]

分割とは

$$\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_N$$

を満たす N 個の非負整数の組

$$\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_N)$$

のことである．その要素の和 $\sum_{i=1}^{N} \kappa_i$ を「重み」と言い $|\kappa|$ と表し，κ_i のうちゼロでないものの数を $l(\kappa)$ と表す．分割 κ に対応するヤング図形は，まず水平に κ_1 個の正方形を水平に並べ，その下に左揃えになるよう水平に κ_2 個の正方形を水平に並べ，その下に左揃えになるよう水平に κ_3 個の正方形を水平に並べ … これを κ_i がゼロになるまで繰り返すと得られる．分割 κ に対応するヤ

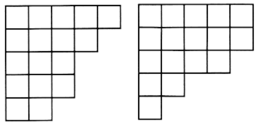


図 1 (a) 分割 $\kappa = (5,4,3,3,2)$ に対するヤング図形と (b) κ に共役な分割 $\kappa' = (5,5,4,2,1)$ に対するヤング図形．

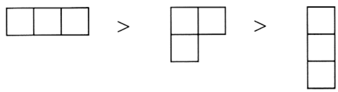


図 2 ドミナンス半順序．

ング図形も同じ記号 κ を用いて表す．図 1 (a) は $\kappa = (5,4,3,3,2)$ に対するヤング図形である．分割 κ に対応する図 1 (a) に対して縦と横を入れ替えた図 1 (b) のようなヤング図形に対応する分割 $\kappa' = (\kappa'_1, \cdots, \kappa'_N)$ を κ に共役な分割と言う．今の場合は $\kappa' = (5,5,4,2,1)$ である．

次に同じ重みをもつ分割について順序を定める．すべての分割間に順序が定まるわけではないので正確に言えば半順序と言うべきものである．

$$\kappa \geq \tilde{\kappa}$$

とは $|\kappa| = |\tilde{\kappa}|$ かつすべての $r \geq 1$ に対して

$$\kappa_1 + \cdots + \kappa_r \geq \tilde{\kappa}_1 + \cdots + \tilde{\kappa}_r$$

が成り立つことを意味するものとする．例えば $(2,0,0) > (1,1,0)$, $(3,0,0) > (2,1,0) > (1,1,1)$ となる．これをドミナンス半順序と言う[3,5,6)]．視覚的には，ヤング図形が垂直方向に均されていくに従って半順序において小さくなる（図 2）ことになる．

ヤング図形の各正方形 s に座標 (i,j) を入れる．左上の正方形の座標を $(1,1)$ とし，下に行くにつれ i が増え，右に行くにつれ j が増えると決めておく．ヤング図形の各正方形 $s = (i,j)$ に対して $a'(s), l'(s)$ を図 3 のように決めておく．座標表示すれば

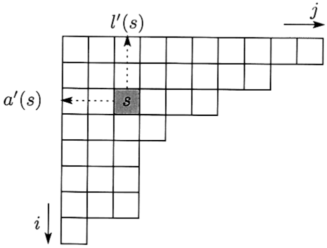


図 3　$a'(s), l'(s)$ の定義.

$$a'(s) = j - 1, \quad l'(s) = i - 1$$

と表される.

4. サザーランド模型の励起状態[1,3,4]

(4) の励起状態を求めるために $\Psi = \Phi\Psi_{\mathrm{g}}$ とおき，因子 Φ を求めることを考える.

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{s}}\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \Psi_{\mathrm{g}}\hat{h}\Phi + E_{\mathrm{g}}\Psi$$

を満たす $\hat{h}$

$$\hat{h} = \sum_{i=1}^{N}\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^2 + \lambda\sum_{i<j}\frac{z_i + z_j}{z_i - z_j}\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} - z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right), \quad (8)$$

$$z_i = \exp(\mathrm{i}2\pi x_i/L)$$

に対する固有値問題

$$\hat{h}\Phi = \epsilon\Phi$$

を解けば，$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{s}}$ に対する固有エネルギー $E = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\epsilon + E_{\mathrm{g}}$ と固有関数 $\Phi\Psi_{\mathrm{g}}$ が得られる．Φ を平面波基底で展開し，(8) の行列要素を求めることにしよう．N 粒子平面波基底は，$z_1, \cdots, z_N$ を変数とする単項対称多項式（monomial symmetric polynomial）$m_\kappa(z_1, \cdots, z_N)$ とガリレイ変換に相当する因子 $\prod_{i=1}^{N} z_i^M$（M は整数）の積 $(\prod_{i=1}^{N} z_i^M)m_\kappa(z_1, \cdots, z_N)$ で表される．ここで単項対称多項式 m_κ は次のように定義される同次対称多項式である：

$$m_\kappa(z_1, \cdots, z_N) = \sum_{p;\ \text{区別できる置換}} z_{p(1)}^{\kappa_1} \cdots z_{p(N)}^{\kappa_N}.$$

例えば $m_1 = \sum_{i=1}^{N} z_i$, $m_{11} = \sum_{i<j} z_i z_j$, $m_2 = \sum_{i=1}^{N} z_i^2$ である．この基底に対してハミルトニアン $\hat{h}$ の行列要素を求めてみると，ごく限られた状態間にしか行列要素が存在しないことがわかる．例えば，$N = 3$ において

$$\begin{aligned} \hat{h}m_3 &= (9 + 6\lambda)m_3 + 6\lambda m_{21}, \\ \hat{h}m_{21} &= (5 + 4\lambda)m_{21} + 12\lambda m_{111}, \\ \hat{h}m_{111} &= 3m_{111} \end{aligned} \quad (9)$$

となっている．この例は以下のような特徴を含んでいる．まず，対称多項式にハミルトニアンを作用させたときには対称多項式のみが生成され，その数は有限である．運動量保存則しか保存則がないのであれば，(9) の右辺に同じ運動量を持つ無限個の平面波基底が現れてもいいはずであるがそれがない．これは自明でない選択則の存在，すなわち背後に代数構造が存在することを示唆している．二番目の特徴は，ハミルトニアン $\hat{h}$ の作用がドミナンス半順序の意味で「三角性」

$$\hat{h}m_\kappa = \sum_{\tilde{\kappa} \leq \kappa} v_{\kappa\tilde{\kappa}} m_{\tilde{\kappa}} \quad (10)$$

を持つことである．(10) を三角性と呼ぶのは，m_κ をドミナンス半順序に従って並べたとき $\hat{h}$ の行列表示が三角行列になるからである．以上の性質が一般的に成り立つなら $\hat{h}$ の固有関数は

$$J_\kappa = m_\kappa + \sum_{\tilde{\kappa} < \kappa} c_{\kappa\tilde{\kappa}} m_{\tilde{\kappa}}$$

の形で与えられる対称多項式になる．有限次元の三角行列なら初等計算で対角化できる．例えば，(9) から得られる 3 行 3 列の三角行列を対角化すると J_κ が

$$\begin{pmatrix} J_3 \\ J_{21} \\ J_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\lambda}{\lambda+2} & \frac{6\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \\ 0 & 1 & \frac{6\lambda}{2\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix} \quad (11)$$

で与えられる．J_κ の固有値 ϵ_κ は，$\hat{h}$ が三角行列になるようにとったとき $\hat{h}$ の行列要素の対角成分で与えられる．$N=3$ の例で言えば J_3，J_{21}，J_{111} に関する固有値は (9) からそれぞれ $9+6\lambda$，$5+4\lambda$，3 で与えられる．一般に J_κ の固有値は

$$\epsilon_\kappa = \sum_{i=1}^{N} \left(\kappa_i^2 + \lambda \left(N+1-2i \right) \kappa_i \right) \qquad (12)$$

となることも初等的な計算でわかる．J_κ 以外の固有関数は

$$J_\kappa \prod_{i=1} z_i^M, \qquad M \text{ は整数}$$

の形で与えられ，その固有値は (12) において $\kappa_i \to \kappa_i + M$ と置き換えることで得られる．固有値のこの単純な表式 (12) は次節で説明するような物理的な解釈を与える．

さて固有関数の（一部をなす）同次対称多項式 J_κ も数学的に良い性質を持っている．$\lambda=0$ のとき明らかに $J_\kappa = m_\kappa$ である．$\lambda \to 1$ のとき，(11) は

$$J_3 \to m_3 + m_{21} + m_{111},$$
$$J_{21} \to m_{21} + 2m_{111},$$
$$J_{111} = m_{111}$$

となり，これはシューア関数

$$s_\kappa = \left(\prod_{i<j} (z_i - z_j) \right)^{-1} \times \sum_{P;\,\text{置換}} (-1)^P \, z_{p(1)}^{\kappa_1+N-1} z_{p(2)}^{\kappa_2+N-2} \cdots z_{p(N)}^{\kappa_N}$$

に一致する．

$\lambda \to \infty$ のとき，(11) は

$$J_3 \to m_3 + 3m_{21} + 6m_{111} = e_{111},$$
$$J_{21} \to m_{21} + 3m_{111} = e_{21},$$
$$J_{111} = m_{111} = e_3$$

となる．ここで e_κ は基本対称多項式 (elementary symmetric polynomial)

$$e_\kappa = e_{\kappa_1} \cdots e_{\kappa_N},$$

$$e_n = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le N} z_{i_1} \cdots z_{i_n}$$

を表す．一般の κ に対しても

$$\lim_{\lambda \to \infty} J_\kappa = e_{\kappa'}$$

が成り立つ．ここで κ' は κ に共役な分割である．1 つのパラメター λ で，3 つの重要な対称多項式 $m_\kappa, s_\kappa, e_{\kappa'}$ をつなぐこの対称多項式 J_κ はジャック多項式と呼ばれている[1,3~5]．

5. よこに眺めれば粒子，たてに見れば空孔…

J_κ に対応する $\hat{h}$ の固有値 (12) を

$$\epsilon_\kappa = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \left(p_i^0\right)^2, \qquad (13)$$
$$p_i = \kappa_i + \frac{\lambda}{2} \left(N+1-2i \right),$$
$$p_i^0 = \frac{\lambda}{2} \left(N+1-2i \right)$$

と変形すると，仮想的な自由粒子のスペクトルとみなすことができる．ヤング図形内のそれぞれの行が自由粒子に対応するわけである．次に固有値 (12) を変形することで別の自由粒子系として眺めてみる．ヤング図形と分割における関係式

$$\sum_{j=1}^{\kappa_i} a'(s) = \frac{1}{2} \kappa_i (\kappa_i - 1),$$
$$\sum_{j=1}^{\kappa_i} l'(s) = (i-1) \kappa_i \qquad (14)$$

を用いると，(12) は $a'(s), l'(s)$ を用いて

$$2 \sum_{s \in \kappa} \left(a'(s) - \lambda l'(s) \right) + \left(\lambda (N-1) + 1 \right) |\kappa| \qquad (15)$$

と書くことができる．κ に共役なヤング図形 κ' においては行と列が入れ替わっているので，(15) は

$$2 \sum_{s \in \kappa'} \left(l'(s) - \lambda a'(s) \right) + \left\{ \lambda (N-1) + 1 \right\} |\kappa'| \qquad (16)$$

と書くこともできる．ここで，κ' において (14) に

相当する関係式を用いると

$$\epsilon_\kappa = \sum_{j=1}^{l(\kappa')} \left(-\lambda(\kappa'_j)^2 + (\lambda N + 2j - 1)\kappa'_j\right)$$

となる．これを

$$p_j = \kappa'_j - \frac{\lambda N - 1 + 2j}{2\lambda}, \qquad (17)$$

$$p_j^0 = -\frac{\lambda N - 1 + 2j}{2\lambda} \qquad (18)$$

で表すと

$$\epsilon_\kappa = -\lambda \sum_{j=1}^{l(\kappa')} \left[p_j^2 - (p_j^0)^2\right] \qquad (19)$$

となる．これはまた自由粒子のエネルギーの形をしている．しかし前の表式とは，p_j の前の係数が $-\lambda$ 倍異なる．これは先の自由粒子に比べて質量や電荷が $1/\lambda$ になった空孔型の粒子であるとみなせる．ヤング図形の各行が空孔に対応するわけである．質量が $1/\lambda$ 倍になっていることは λ が有理数なら分数電荷をもった空孔ということになる．$\lambda = 1$ のときは自由フェルミオンと等価なので，「空孔と粒子の質量が等しい」というよく知られた結果に帰着する．

6. 相関関数と素励起[3, 4]

前節で述べた自由空孔と自由粒子がどのように物理量に反映するかをみるには相関関数，例えばグリーン関数

$$G^-(x,t) = \langle \mathrm{g}|\hat{\psi}^\dagger(x,t)\hat{\psi}(0,0)|\mathrm{g}\rangle \qquad (20)$$

を調べると良い．以下 λ を偶数，粒子はボソンだとする．(20) は時刻 $(t=)0$ に，基底状態 $|\mathrm{g}\rangle$ において原点 $(x=)0$ から粒子を 1 つ抜き取り，時間発展させた後，時刻 t に位置 x に粒子を 1 つ付け加えたときに基底状態 $\langle \mathrm{g}|$ にある確率振幅を表している．粒子を「抜く」とか「付ける」などとおおらかな言い方をしたが，波動関数 Ψ_g に対する場の演算子 $\hat{\psi}(0,0)$ の作用は，第 2 量子化の知識から

$$\hat{\psi}(0,0)\Psi_\mathrm{g}(x_1,\cdots,x_N) = \sqrt{N}\Psi_\mathrm{g}(0,x_1,\cdots,x_{N-1}). \qquad (21)$$

で与えられることがわかる．グリーン関数にどのような励起状態が関与するかは (21) の右辺を $N-1$ 粒子系の固有関数で展開すればいい．Ψ_g が (5) で与えられることと，ジャック多項式の性質により，

$$\Psi_\mathrm{g}(0,x_1,\cdots,x_{N-1}) = \left(\prod_{i=1}^{N-1} z_i^{-\lambda/2}\right)\sum_\kappa f_\kappa J_\kappa \Psi_\mathrm{g}(x_1,\cdots,x_{N-1}) \qquad (22)$$

と展開され，その展開係数 f_κ は「選択則」

$$f_\kappa \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad (1,\lambda+1) \notin \kappa$$

を満たすことがわかる[4)]．これより (22) に寄与し得る励起状態のヤング図形は，例えば $\lambda = 2$ の場合では図 4 で与えられる．基底状態から 1 つ粒子を抜くと λ 個の空孔が励起される．前節で得られた「分数電荷を持つ空孔」という描像がグリーン関数に現れたわけである．

密度相関関数

$$\langle \mathrm{g}|\hat{\rho}(x,t)\hat{\rho}(0,0)|\mathrm{g}\rangle \qquad (23)$$

についても同様な解析が可能である．ここで演算子

$$\hat{\rho}(x,t) = \exp(\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}_\mathrm{s}t)\hat{\rho}(x,0)\exp(-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}_\mathrm{s}t),$$
$$\hat{\rho}(0,0) = \left\{\sum_{i=1}^{N}\delta(x_i)\right\} - N/L \qquad (24)$$

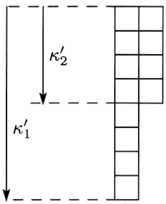


図 4　$G^-(x,t)$ に寄与する励起状態の典型的なヤング図形，$\lambda = 2$ の場合．

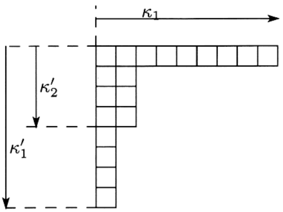


図 5　$\lambda=2$ のとき $\langle \mathrm{g}|\hat{\rho}(x,t)\hat{\rho}(0,0)|\mathrm{g}\rangle$ に寄与する励起状態の典型的なヤング図形．κ'_1, κ'_2 は空孔，κ_1 は粒子を表す．

は密度演算子から平均粒子密度を引いたものである．(24) はジャック多項式を用いて

$$\rho(0,0)=\sum_{\kappa} c_\kappa \left(J_\kappa(z_1,\cdots,z_N)+\text{複素共役}\right)$$

と展開され，その展開係数は，選択則

$$c_\kappa \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad (2,\lambda+1)\notin\kappa$$

を満たすことがジャック多項式の理論から導かれる[3,4]．よって (23) に寄与し得る励起状態は $s=(2,\lambda+1)$ を含まないヤング図形を持つ．典型例は図 5 に与えられている．サザーランド模型の密度励起は，1 つの粒子と λ 個の空孔の複合励起で表される．密度励起は電荷的に中性励起だから

$$\text{粒子の電荷}+\lambda\times\text{空孔の電荷}=0$$

となってここまでの結果とつじつまが合っている．

なお，グリーン関数 (20)，密度相関関数 (23) ともに，分割やヤング図形を用いて有限系における厳密な結果と熱力学極限の美しい表式が得られている[3,4]．

7. おわりに

ヤング図形は，相互作用のない多粒子系の状態や内部自由度のある系の分類に用いられることが多いが，相互作用のある多粒子系の状態を記述していることで，多体系の物理，特に物性物理にとっても重要なものになっている．もちろん出発点のハミルトニアンは実際の物質の状況を忠実に反映しているわけではなく，むしろ数学的性質の良さをあてにして選ばれたものである．しかし結果として得られた基底状態の波動関数やその上の励起状態の素励起描像は，強磁場中の 2 次元電子系で実現する分数量子ホール系や 1 次元量子スピン系といった物性分野と密接に関係している．実際に「分数化した素励起」という概念は分数量子ホール系においてすでに提案されていたものであり，1 次元反強磁性スピン系におけるスピノンと呼ばれる素励起も従来型の磁気励起であるスピン波（マグノン）が分裂したものとみなすことができる．サザーランド模型には様々な発展版があり，それらの物理的性質を記述する際にもヤング図形は不可欠なものになっている．

本稿について貴重なご意見を頂いた堺和光，國場敦夫の両氏と共同研究者の倉本義夫氏に感謝します．

参考文献

1) 粟田英資，『数理物理への誘い 3』第 2 話，遊星社，2000.
2) B. Sutherland, *Beautiful models*, (World Scientific, 2004).
3) 白石潤一，『量子可積分系入門』SGC ライブラリ 28，サイエンス社，2003.
4) Y. Kuramoto and Y. Kato, *Dynamics of One-Dimensional Quantum Systems with Long-Range Interactions* (Cambridge University Press, 2007 出版予定).
5) I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.* (Oxford University Press, 1995).
6) 鈴木淳史，『現代物理数学への招待』SGC ライブラリ 47，サイエンス社，2006.

（かとう・ゆうすけ，東京大学大学院総合文化研究科）

ランダム結晶成長とヤング図形

笹本 智弘

1. はじめに

結晶成長は我々にとってかなり身近なものである．小中学校の理科では食塩やミョウバンを用いた実験が行われているし，もっと単純に家庭で水から氷になる様子を眺めることもできる．一方で結晶がなぜあのような形を取るのか，またどのようにして成長してゆくのかということを知るのは，実はなかなか難しい．結晶成長は形態形成を伴う非平衡現象であるため，未解決の問題も多い[1)]．

もちろんこれまでの研究で多くのことが明らかにされて来ているが，その際現実の結晶成長を単純なルールで模したモデルに関する研究も重要な役割を果たして来た．本稿で解説するのは，そのような結晶成長模型の中でも特に単純な確率的ルールによって定義されるある種の模型が，実はヤング図形と深く関係していたというお話である．残念ながら登場する結晶は単純過ぎて雪の結晶のように美しいというほどのものではないが，背後に潜む数理的な構造は大変美しい．

2. 多核成長模型

まず本節では，多核成長模型と呼ばれる1次元の空間（r 軸とする）上で定義された結晶成長模型を考える（図 1）[2)]．時刻 $t=0$ まで結晶は存在せず真っ平らだったところに，時刻 $t=0$ で原点に高さ1の核が生成しそこから結晶が成長し始める．この核はその後速さ1で左右両方向へ広がり，高さ1の台が成長してゆく．ずいぶん人工的な感じがするかもしれないが，雪の場合なども最初は不純物などを核としてその周りにだんだんと結晶が成長してゆくことを思い出してほしい．この台の上では，至る所一定の割合で核生成が起こる．より正確には，微小時間 dt の間に微小区間 dr で核生成が起こる確率は $2drdt$ で，各微小区間での核生成は独立に起こるとする．それらの核の高さも1で，核はその後やはり左右へ速さ1で広がり台をなす．台は左右に成長するので時々衝突することがあるが，そのとき2つの台はくっついてしまうとする．図1には，核生成が $(r,t)=(-0.8,1.6),(1.4,2.6),(2.6,3),(-0.4,3.6)$ で起こ

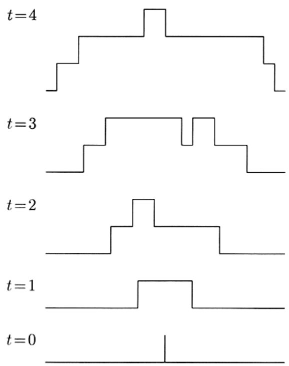


図1　多核成長模型.

った場合の例について，$t = 1, 2, 3, 4$ での台の様子が描かれている．これが多核成長模型である．時間も空間も連続的であるが，高さは自然数の値のみを取る模型になっている．また左右への成長は決定論的だが核生成が確率的なので，ランダムな結晶成長模型である．

我々はこの結晶がどのように成長してゆくかに興味があるのだが，ここでは簡単のため時刻 t における原点での高さ $h(t)$ に着目する．ただし結晶の成長はすべて時刻 0 の最初の核生成から成長した台の上で起こるので，その高さを基準 (0) とする．核生成がランダムだから $h(t)$ もランダム変数（確率変数）なので，その確率的な性質を調べたい．結論を先に言うとそれがヤング図形を用いて記述できるということなのだが，この模型の一体どこにヤング図形が潜んでいるというのであろうか．

まず状況を見やすくするため，結晶が成長してゆく様子を時空 2 次元での図として眺めてみよう（図 2）．横を空間（r）方向，縦を時間（t）方向にとり，結晶の高さの変化のある所を線で表す．図を書くには核生成の起こった所に点を打ち，そこから右上と左上 45° 方向（x, y 方向とする）に線分を伸ばし，2 つの台が衝突するところがあればそこで線分を伸ばすのを止めればよい．（図 2 の t を $t = 8$ と思ったときの $t = 0, 1, \cdots, 4$ の状況を見たものが図 1 になっている．）ある点の影響は，そこから左右上方向 45° の線内（光円錐内部のようなもの）にしか及ばないから，$h(t)$ を考えるときは原点 $(0, 0)$ と $(0, t)$ を結んだ線を対角線とする面積 $t^2/2$ の正方形の内部を見れば良い．

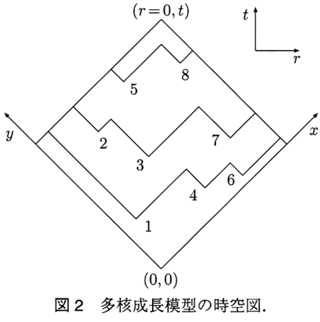


図 2　多核成長模型の時空図．

いつどこで核生成が起こるのかという情報を与えられたときの $h(t)$ は，この図を書けば容易にわかる．衝突して合体してしまう台ごとにグループ分けすれば，そのグループの個数が $h(t)$ である．図 2 のように，核生成が起こった点の x 座標に小さい順に 1,2,$\cdots$ と番号をつけることにすると，例えば図 2 の場合，(1,4,6), (2,3,7), (5,8) という 3 つのグループがあり，$h(t) = 3$ とわかる．

次のように考えることもできる．図において，原点 $(0, 0)$ から出発し，核生成の点をいくつか通って最後に $(0, t)$ に到達する経路を考える．ただし経路は x 座標も y 座標も増える方向にのみ移動でき，さらになるべく多くの核生成の点を通ることにする．するとそのような経路は，各グループから 1 つずつ点をとってくることになるので，その上の核生成の個数は $h(t)$ に等しくなる．図の例ではそのような経路は，125,135,138,478,678 の 5 通りあるが，どれも 3 つの数字からなりこの 3 という数字は $h(t)$ に等しい．

この見方はより一般の場合を考えるのに便利である．核生成の番号を y 座標の小さい順に並べて作られる数列を考えよう．例えば図の場合は 64713825 となるが，これは 8 個の数字の順列とみなせる．すると上の経路に対応する核生成の番号の数列は，この順列の最長増大部分列に等しくなっている．ここで順列の増大部分列とは，数字が大きくなるような順列の部分列のことで，最長というのは部分列のうちその長さが最大のものということである．もう少しちゃんと言うと，n 個の数字の順列は自然に n 個の数字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ とみなすことができるが，その増大部分列は，$\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)$，ただし $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ かつ $1 \le \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k) \le n$ と表されるものである．置換 σ に対しその最長増大部分列の長さを $l_n(\sigma)$ と書くことにすると，上の例と同様に考えて，以下のことが分かる：一般に核生

成パターンは，核生成の個数が n であった場合，n 個の数字の置換 σ で表すことができ，結晶の高さは対応する置換の最長増大部分列の長さ $l_n(\sigma)$ に等しい．

$h(t)$ の確率的な性質を知るには，さらに各々の置換がどれだけの確率で起こるのかを知る必要があるが，それはさほど難しくない．まず，正方形内の核生成の個数が n である確率 p_n がどのような確率分布に従っているかを考えてみよう．時空図で考えると先に書いたルールは，各微小領域 $drdt$ が独立で，単位時間あたり単位長さあたり 2 の割合で核生成が起こるということに相当するから，n はパラメータ t^2 のポアッソン分布に従うことがわかる．式で書くと，$p_n = t^{2n}e^{-t^2}/n!$．次に正方形内の核生成の個数 n を固定したとき（個数が n だったという条件の下で），置換は全部で $n!$ 通りあるが，それらはすべて同じ確率で起こる．

ここまでの話で，高さの分布関数が次のように書けることが分かった：

$$\mathbb{P}[h(t) \le k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n[l_n(\sigma) \le k] \frac{t^{2n}e^{-t^2}}{n!}. \tag{1}$$

ただし左辺は多核成長模型で時刻 t の高さ $h(t)$ が k 以下である確率，右辺の $\mathbb{P}_n$ は，n 個のすべての置換が $1/n!$ で起こるような確率測度である．

3. ヤング図形との関係

ここで説明の都合上，標準盤というものを定義しておこう．これは大きさ n のヤング図形の各タイルの中に，$1, 2, \cdots, n$ の数字を一つずつ，右に行っても下に行っても大きくなるような仕方で入れたもののことである．また形が λ であるような標準盤の数を f^λ で表す．例えば  の場合，可能な標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

の 5 通りで，f $= 5$ である．

さて，n 個の数字の置換 σ が与えられたとき，下の段の数列 $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ の数字を左から順に取り出していって，大きさ n の標準盤を作ってゆくことができる．ただし順々に取り出された数字は次のような規則に従うものとする．

(a) その行にある数字が自分より小さいものだけであればその行の右側にくっつく．

(b) 自分より大きな数字がその行にあったら，自分より大きな数のうち一番小さいものを次の行に移動させる．

規則だけだと分かりにくいので，先の例 (64713825) に適用してみると

$$\begin{array}{|c|}\hline 6\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 6\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 4&7\\\hline 6\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1&7\\\hline 4\\\cline{1-1} 6\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&7\\\hline 6\\\cline{1-1}\end{array}$$
$$\to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&8\\\hline 4&7\\\cline{1-2} 6\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&8\\\hline 3&7\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1} 6\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&7&8\\\hline 4\\\cline{1-1} 6\\\cline{1-1}\end{array} \tag{2}$$

となる．このようにして得られる標準盤を P と呼ぶ．さらに，何回目の操作でどこに新たに数字がつけ加わったかということを記録するもう一つ別の標準盤も作ることにし，それを Q と呼ぶ．上の例の場合，得られる標準盤の対は

$$P = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&7&8\\\hline 4\\\cline{1-1} 6\\\cline{1-1}\end{array}, \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&6\\\hline 2&5&8\\\hline 4\\\cline{1-1} 7\\\cline{1-1}\end{array}$$

となる．以上の手続きはロビンソン・シェーンステッド（RS）アルゴリズムと呼ばれ，置換と標準盤の対 (P, Q) との間の一対一対応を与えることが知られている[3~9]．

さらに RS アルゴリズムの対応において，置換の最長増大部分列の長さは，ヤング図形の第 1 行の長さ λ_1 に等しいことが知られており，上の例で見ると確かに $\lambda_1 = 3$ となっている．この事実は (2) の第 1 行の変化と図 2 を比較しながら眺めると直感的に理解することができる．すなわち，(2) の第 1 行の変化は，図 2 で y 座標の小さいほうから核生成を見てゆき，対応する番号を書いていくが，台の衝突が起こったときはより新しい番号

で置き換えるという手続きを考えることに等しい．図 2 の例では，まず 6 を取る．次に 4 であるがこれは 6 と衝突するので 4 と置き換える．今手許にあるのは 4 という数字一つである．次に 7 であるがこれは 4 と衝突しないのでそのまま右に並べて 47 とする．以下同様．そうすると最後には 125 という数字の列が得られるが，これは図 2 において高さごとの台のグループの各々から一番左側にある核生成の番号を並べたものになっていて，これが $h(t)$，置換の言葉では最長増大部分列の長さに等しいというわけである．

すると今度は RS アルゴリズムの第 2 列以下は結晶成長模型においてはどのような意味があるのか？ という疑問がわくかもしれないが，それは多核成長模型の多層化ということに対応している．これは結晶の 1 点における高さだけでなく，結晶表面の荒さ（空間的な相関）についての情報を得るのに重要なのであるが，ここではこれ以上突っ込まないことにする[9,10]．

これで多核成長模型とヤング図形の関係が明らかになったので，(1) をヤング図形の言葉を用いて書き直してみよう．RS アルゴリズムの対応を用いて $\mathbb{P}_n$ をヤング図形の言葉に直すと，大きさ n のヤング図形 λ が起こる確率が $(f^\lambda)^2/n!$ で与えられるということに対応することに注意すると，$h(t)$ の分布関数は f^λ を用いて次のように書けることが分かる：

$$\mathbb{P}[h(t) \le k] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda:|\lambda|=n,\lambda_1\le k} (f^\lambda)^2 \frac{t^{2n}e^{-t^2}}{(n!)^2}.$$

ただしここで $|\lambda|$ はヤング図形のサイズ（箱の数）である．

結晶成長の性質を調べるという観点からは，この後さらに t が大きくなったときにこの分布関数が漸近的にどのように振る舞うかという問題がある．結果としては界面高さの分布はランダム行列の最大固有値の分布と同じになるという驚くべき結果が得られるのであるが，今回の特集のヤング図形と遊ぶ趣旨から外れて来るので，ここらで少し気分を変えて新しい模型を考えることにしよう．

■ 4．角成長模型 ■

この節では別の結晶成長模型を導入する[11]．今度は，2 次元平面の第 1 象限が面積 1 の正方形のタイルによって原点付近から段々と埋まって行く状況を考える．第 1 象限以外は既に結晶化しているとすると，タイルが 1 つ加わることが結晶の成長に対応する．ただし成長はタイルの 4 辺のうち 2 辺がその時点での結晶に接触するところでのみ起こる（図 3 で言うと $*$ のところ）．図 3 のように i, j 軸を取り，タイルの埋まる位置を (i, j) で指定することにする（$i, j = 1, 2, \cdots$）．ここで確率的な成長ルールを与えよう．今度は時間も空間も離散的である．まず時刻 0 ではどこも埋まっていない（空）．時刻 1 では確率 $1-q$ で $(1,1)$ が埋まり確率 q で空のままである．次に時刻 2 では，時刻 1 でどこも埋まっていなかったときは確率 $1-q$ で $(1,1)$ が埋まり確率 q で空のままで，時刻 1 で $(1,1)$ が埋まっているときは，時刻 2 では $(1,2)$ と $(2,1)$ が各々独立に確率 $1-q$ で埋まり，確率 q で埋まらない．以下の時刻でも同様で，上で述べた成長可能ないくつかの点が各々独立に確率 $1-q$ で埋まり，確率 q で埋まらないとする．この模型は第 1 象限の角から段々と成長してゆくので，角成長模型と呼ぶことにする．なお角成長模型はアステカダイヤモンドというある種のタイリング問題とも関係していることが知られている[13]．

i 軸を下方向，j 軸を右方向に書けば，この模型はヤング図形が確率的に成長している模型と考えることもできる．時刻 $t=3$ までの可能なパター

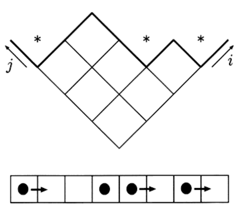


図 3　角成長模型および非対称排他過程との関係．

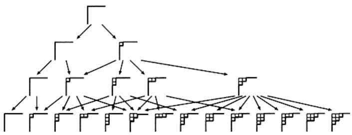


図 4　角成長模型の $t=3$ までの可能性.

ンを書くと図 4 のようになる．いったん埋まってしまった部分ではその後何も起こらないので，我々はこの埋まった部分とまだ埋まっていない部分の界面に着目し，時刻 t ではどれくらい成長しているのか？ またはある点まで成長するのにどれくらいの時間がかかるのか？ といったことを問題とする．

■　5. 非対称排他過程との関係　■

角成長模型は非対称排他過程（ASEP）と呼ばれる多粒子ランダムウォーク模型と深い関係がある．後の話に必要がある訳ではないが，少し説明しておこう．ASEP は，1 次元の格子上に粒子がおり，各時間ステップで，各粒子は確率 $1-q$ で右隣にホッピングしようとするが右隣に粒子がいたらホッピングできない，という模型である．ASEP は交通流の簡単な模型であると同時に非平衡統計力学における基本的な模型の一つとしてよく調べられている[12]．

前節の角成長模型との関係を見るのは簡単で，界面を図 3 のように表しておいて，i 軸に平行な線を空の格子点，j 軸に平行な線を粒子のいる格子点に対応させればよい．(この対応はソリトン理論等でよく用いられるヤング図形とマヤ図形の対応と同じである．) 時刻 0 で結晶は空で，界面は i, j 軸の正の部分から成るカギ型であったが，これは ASEP においては原点より左側の格子点がすべて埋まっていて右側は空の初期条件を考えていることに対応する．また結晶が成長することは，ASEP の言葉では粒子が右に移動することと同じである．

■　6. ヤング図形をもってヤング図形を制す　■

角成長模型において対角線に着目し，結晶が (N, N) まで成長するのにかかる時間 $T(N)$ について考えよう．まず $N=1$ の場合は簡単で，これは最初空だった所に初めて $(1,1)$ が埋まるまでにかかる時間であるから，$T(1)$ はパラメータ q の幾何分布に従うことが分かる (表の出る確率が $1-q$ のコインを表が出るまで投げ続ける試行において，それまでに裏の出る回数の従う分布を考えよ)．

次に $N=2$ の場合を考えよう．今度はすぐによく知られた分布で表すことはできないが，次のように考えることができる．$T(2)$ は $(2,2)$ が埋まるまでにかかる時間であるが，ここが埋まるためにはその前に $(1,2)$ と $(2,1)$ の両方が埋まっている必要がある．$(1,1)$ が埋まるまでの時間を $w_{1,1}$，$(1,1)$ が埋まった後 $(1,2), (2,1)$ が埋まるまでの時間をそれぞれ $w_{1,2}, w_{2,1}$，$(1,2)$ および $(2,1)$ が埋まった後 $(2,2)$ が埋まるまでの時間を $w_{2,2}$ と書くことにすると，考えている時間は $T(2) = w_{1,1} + \max(w_{1,2}, w_{2,1}) + w_{2,2}$ と書くことができる．ただし $w_{i,j}$ $(1 \le i, j \le 2)$ は各々パラメータ q の幾何分布に従う．

一般の N の場合も同様であり，各格子点 (i, j) での待ち時間を $w_{i,j}$ と書くことにすると各 $w_{i,j}$ はパラメータ q の幾何分布に従い，考えている時間は

$$T(N) = \max_{\pi \in \Pi} \sum_{(i,j) \in \pi} w_{i,j} \tag{3}$$

と書ける．ただし Π は $(1,1)$ からスタートして，i 座標または j 座標のいずれか一方が 1 だけ増加するような点を通って (N, N) まで行くような経路 π の全体である．

このように定式化してみると，$T(N)$ を考えることは原点から対角的にある程度離れた点までゆく経路に関する最適化問題となっており，多核成長模型での $h(t)$ を考えることと非常に似ていることに気づく．実際 $T(N)$ についての確率的な性質を調べるのに，多核成長模型の場合とほとんど同様な手法を用いることができるのである．その

ためにはまず $w_{i,j}$ $(1 \le i, j \le N)$ を各成分自然数の $N \times N$ 行列とみなす．多核成長模型のときは置換と標準盤の対の対応を与える RS アルゴリズムというものを用いたが，今度は $N \times N$ の自然数行列と半標準盤の対の対応を与えるロビンソン・シェーンステッド・クヌース（RSK）アルゴリズムと呼ばれるものが使える．

さらに，今 $w_{i,j}$ は各々パラメータ q の幾何分布に従う確率変数であるが，パラメータを $a_i b_j$ と一般化した状況でもほとんど同様な議論が成り立ち，RSK アルゴリズムを用いると $T(N)$ の確率分布は再びヤング図形上の確率を用いて記述できる．詳細は省略するが，次のような結果が得られる：

$$\mathbb{P}[T(N) \le k] = \frac{1}{Z_N} \sum_{\lambda:\lambda_1 \le k} s_\lambda(a) s_\lambda(b).$$

ただし Z_N は規格化定数．また $s_\lambda(a) = s_\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ はシューア関数で，ヤング図形の組合せ論においては必ずと言っていいほど現れる関数である．角成長模型はヤング図形がランダムに成長する模型だったのだが，その性質を調べるのにまたまたヤング図形が有用なのである．

7. おわりに

本稿では，ある種のランダム結晶成長模型がヤング図形と深く関係していること，とくに高さ等の分布関数がヤング図形に付随する基本的な量や関数を用いて記述できることについて解説した．ここで述べたのは一番基本的な場合だけであるが，ヤング図形のほうでこれまで知られていることを結晶成長の文脈で考えるとどうなるのか，あるいはその逆に結晶成長において少し異なった状況を考えることがヤング図形の言葉で言えばどうなるのかというようなことを考える（要するにヤング図形と遊ぶ）と，色々面白いことが出てくる．

例えば，結晶成長を r 軸の正部分に限ってしまうことが考えられる．これは半無限における結晶成長であるが，RS(K) アルゴリズムの対称性と関係する．また角成長模型で時刻 t において界面がどれくらい成長しているのかについては，要素が 0 または 1 の行列を用いて記述できるが，双対 RSK というものを用いると，再びシューア関数を用いた分布関数が現れる…といった具合である．これ以外にも種々の対応（“遊び方”）が知られているが，まだまだ誰にも気づかれてないものも沢山あると思われるので，興味を持った方は自分で実際に手を動かして，新しく楽しい遊び方を発見してほしい．

一方で結晶成長の観点からは自然で解析も可能だが，今回解説した枠組みではどのように捉えられるのかよく分かっていない場合もあるし[14]，多時刻相関のように現状では全く手の出ない問題もある．その全容の解明は今後の課題であるが，それは統計力学・確率論・可積分系・組合せ論といった諸分野の関係を理解することにもつながってくる．ヤング図形と遊び疲れた後はそのような大きな問題について考えてみるのも面白いだろう．

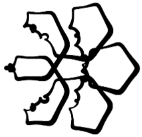
最後に本稿の内容に関してこれまで議論の相手になって頂いた種村秀紀氏，香取眞理氏，永尾太郎氏，今村卓史氏をはじめ多くの方々に深く感謝致します．

参考文献

1) 例えば，上羽牧夫，『結晶成長のしくみを探る—その物理的基礎』，共立出版，2002 年，本田勝也，『フラクタル』，朝倉書店，2002 年．
2) M. Prähofer and H. Spohn. *Physica A*, **279**:342, 2000; *Phys. Rev. Lett*, **84**:4882, 2000.
3) グズコーホドリ，数学セミナー，1983 年 5, 6, 7 月号．
4) 堀田良之，『加群十話—代数学入門』，朝倉書店，1988 年．
5) 小池和彦，数理科学 385, 1995 年．
6) 寺田至，『ヤング図形のはなし』，日本評論社，2002 年．
7) W. Fulton, Young Tableaux, Cambridge, 1997.
8) R. Stanley, Enumerative Combinatorics vol.**2**, Cambridge, 1999.
9) B.E. Sagan, The Symmetric Group (2nd ed.), Springer, 2000.
10) K. Johansson. *Com. Math. Phys.* **242**:277, 2003.
11) K. Johansson. *Com. Math. Phys.*, **209**:437, 2000.
12) 笹本智弘：物性研究 2003 年 3 月号．
13) ジョージ・アンドリュース，キムモ・エリクソン著，佐藤文広訳，『整数の分割』，数学書房，2006 年．
14) T Sasamoto. *J. Phys. A*, **38**:L549, 2005. A. Borodin, M. Prähofer, P.L. Ferrari, T. Sasamoto, math-ph/0608056.

（ささもと・ともひろ，千葉大学理学部）

弦理論とヤング図形



太田　和俊

1. はじめに

弦理論，特に超弦理論は重力を含む力および物質の統一理論の候補と考えられており，盛んに研究が行われている物理，数学の一分野である．しかしながら，実はその理論の定式化そのものに不満があり，弦の世界面の種数を手で足し上げる必要があったり，弦理論における非摂動効果をうまく扱えないといったような問題がある．そのため，弦の場の理論や行列模型を用いた非摂動論的な定式化が提案されてはいるが，その全貌が完全に明らかになったとは言えないのが現状である．

ところが，ここ数年の進展により弦理論の中でも少なくとも位相的弦理論と呼ばれる標的空間のトポロジーにしか依らないような特別な物に関しては，その非摂動効果も含めてうまく定義されているような例がいくつか知られるようになった．そこには，ラージ N ゲージ理論，行列模型，ソリトンのモジュライ空間の体積，そして今回の特集であるヤング図形との不思議な関係が見出される．ここでは，それらのつながりについてその一端を見ていきたいと思う．

2. 2次元ゲージ理論と弦理論

弦理論の話に入る前にやや唐突であるが2次元のゲージ理論の話から始めたいと思う．いま，種数が G で面積が A であるような Riemann 面 Σ_G 上で2次元の $U(N)$ ゲージ理論（Yang–Mills 理論）を考える．その分配関数はゲージ場 A_μ に対する経路積分

$$Z=\int \mathcal{D}A_\mu e^{-\frac{1}{4g_{\mathrm{YM}}^2}\int_{\Sigma_G} d^2x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \tag{1}$$

で与えられ，g_{YM} は結合定数である．2次元のゲージ理論は4次元のゲージ理論などと比べるとやや特殊で，ゲージ場の強さの双対が $F=\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ と書けることからゲージ場はスカラー場と同じ自由度しかないことがわかり，話はずいぶん簡単になる．実際，分配関数 (1) は有限自由度の統計力学的分配関数

$$Z=\sum_R (\dim R)^{2-2G} e^{-\frac{\lambda A}{2N}C_2(R)} \tag{2}$$

と等価であることが，Migdal によって示された[1)]．ここで，$\lambda=g_{\mathrm{YM}}^2N$ は't Hooft の結合定数と呼ばれる．分配関数の和はゲージ群 $U(N)$ のすべての既約表現 R にわたり，$\dim R$ と $C_2(R)$ はそれぞれその表現に対する次元と2次の Casimir の値を表す．$U(N)$ 群の既約表現 R は行の数が最大 N であるようなヤング図形と1対1に対応させることができるので，いま対応するヤング図形の i 行目の箱の数を k_i とすると，この整数列は

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_N \tag{3}$$

という条件を満たし[*1)]，表現の次元と2次の Casimir の値はこの整数列を用いて，

$$\dim R = \prod_{1\leq i<j\leq N} \frac{k_i-k_j-i+j}{-i+j},$$

$$C_2(R) = \sum_{i=1}^{N}(Nk_i+k_i(k_i-2i+1))$$

と書き表すことができる．

さて，ここからこの分配関数と弦理論との繋がりを見ていこう．Gross と Taylor はこの2次元 Yang–Mills

*1) いま $U(N)$ の群を考えているので k_i が負の値も取り得るが，k_N が全体の $U(1)$ 部分の電荷に対応し，そこから数えた箱の数 ($k'_i=k_i-k_N$, $i=1,\cdots,N-1$) を $SU(N)$ 部分のヤング図形と理解する．

理論の分配関数（正確には自由エネルギー）がゲージ群 $U(N)$ の階数 N が十分大きい極限（ラージ N 極限）で弦理論の分配関数として解釈できることを示した[2)]．（解説論文[3)]も参考になる．）一般に $U(N)$ ゲージ理論のラージ N 極限が弦理論としての性質を持つという考え方自体は古くからあったが[4)]，2 次元のゲージ理論の場合は分配関数が厳密に求まっているため実際に $1/N$ をパラメータとした級数に漸近展開できるのである．実際には N が十分に大きい極限で，分配関数は k_i が正の部分からくる寄与と負の部分からの寄与との積の形

$$Z = |Z_{\rm chiral}|^2 \tag{4}$$

に分解し（カイラル分解），そのカイラル部分の分配関数が

$$Z_{\rm chiral} = \sum_{g=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{2g-2} \times \sum_{\substack{k,n\geq 0 \\ k(2-2G)-n=2-2g}} H^{g,G}_{k,n} \frac{(-\lambda A)^n}{n!} e^{-\frac{\lambda A}{2}k} \tag{5}$$

と展開される．ここで，

$$H^{g,G}_{k,n} = \sum_{|R|=k} \left(\frac{d_R}{k!}\right)^{2-2G} \left(\frac{\kappa(R)}{2}\right)^n \tag{6}$$

は Hurwitz 数と呼ばれる数である．Hurwitz 数の定義の中で，和は箱の数が $k=\sum_i k_i$ $(\forall k_i \geq 0)$ であるようなヤング図形に対してとられていて，d_R はそのヤング図形に対応する対称群の表現の次元，すなわち

$$d_R = \prod_{1\leq i<j\leq\infty} \frac{k_i - k_j - i + j}{-i+j}$$

であり，$\kappa(R)$ は

$$\kappa(R) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(k_i - 2i + 1)$$

で与えられる数である．いま，ヤング図形の行を表す添字 i, j の取り得る値の範囲が無限大まで広がったことに注意したい．対称群の次元を用いて表され，Hurwitz 数の表式にもある $\left(\frac{d_R}{k!}\right)^2$ という部分は Plancherel 測度と呼ばれ，このようなヤング図形を用いた組合せ論的な話を議論する場合には頻繁に登場し，以下の議論でも重要な役割を持つ．

もう少し詳しくこの展開の弦理論としての意味を見てみよう．まず，$1/N$ を弦理論における結合定数 g_s と同一視すると g_s^{2g-2} に比例した級数展開になっていることから，g は弦の世界面の種数と同一視できることがわかる．ここで，g として負の数も現れてしまうのは世界面として非連結なものもすべて含んでしまうからである．次に Hurwitz 数 $H^{g,G}_{k,n}$ であるが，これは Riemann 面 Σ_G 上への n 個の分岐点を持つような k 重被覆，すなわち種数が $2-2g=k(2-2G)-n$ で与えられるような Riemann 面 Σ_g から Σ_G への被覆写像の数を写像への自己同形群の作用を考慮に入れて数え上げたものである．このような写像の数ごとに，n 個の分岐点に対して $\frac{(-\lambda A)^n}{n!}$，$k$ 重被覆に対して $e^{-\frac{\lambda A}{2}k}$ の重みを掛けて足し上げたものが分配関数 (5) が持つ弦理論としての意味である．このように，弦理論の中でも世界面から標的空間への写像の数のようなものだけを問題にするのは弦の振動を無視し，弦の大域的な配位だけを問題にする位相的弦理論と呼ばれる弦理論の持つ特徴であり，実際ここで出てきた Hurwitz 数は位相的弦理論に現れる Gromov–Witten 不変量と呼ばれる位相不変量とも関係が深い[5)]．

いまの話をヤング図形という立場から眺め直してみると，もともと Riemann 面上の多重被覆を数え上げるという問題を対称群の表現の次元を数える問題に帰着できることは Hurwitz によってすでに 20 世紀の初頭に研究されていた．具体的には種数が G の Riemann 面のすべてのサイクルと分岐点をまわる閉じた経路を考えたとき，その上の多重被覆が対称群に従って交差し元に戻る．このような被覆の種類が対称群を使って分類することができ，それに付随してヤング図形や Plancherel 測度が現れたのである．

3. 離散化された行列模型

2 次元 Yang–Mills 理論の分配関数を後の目的のため別の側面からもう一度見てみたい．まず，ゲージ理論の分配関数 (1) は $U(N)$ の随伴表現に属するようなスカラー場 Φ を補助場として導入すると，次の BF 理論*2) を Φ の 2 次のポテンシャルで変形した分配関数と等価になる．

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi e^{-\int_{\Sigma_G} d^2x\sqrt{g}{\rm Tr}\left[i\Phi F + \frac{\mu}{2}\Phi^2\right]}.$$

*2) 作用の初項が ΦF といった形をしているためにこう呼ばれる．

これは，先に Φ を積分してしまえば運動方程式から (1) の分配関数に戻ることからすぐにわかり，それぞれの理論の結合定数は $g_{\rm YM}^2 = \frac{\mu}{2}$ で関係している．この分配関数を通常のゲージ理論での経路積分の処方に従い，

$$\Phi = \mathrm{diag.}(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N)$$

と対角化したゲージで評価する．ゲージ場の非対角成分やゲージ固定項は完全に積分することができて，その結果は ϕ_i に対する積分として書くことができる．

$$Z = \frac{1}{N!}\sum_{\{p_i\}}\int\prod_{i=1}^{N} d\phi_i \prod_{1\le i<j\le N}(\phi_i - \phi_j)^{2-2G} \times e^{-\sum_{i=1}^{N}(2\pi i\phi_i p_i + \frac{\mu A}{2}\phi_i^2)}. \quad (7)$$

ここで，ϕ_i の差積 $\prod_{i<j}(\phi_i - \phi_j)$ の部分は Vandermonde 行列式と呼ばれ，ゲージ固定の結果として現れる．p_i はゲージ固定した後の各 $U(1)$ に対する第一チャーン類

$$\int_{\Sigma_G} F_i = 2\pi p_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

で決まる N 個の整数列である．さらに，Poisson の和公式

$$\sum_{p_i\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i p_i \phi_i} = \sum_{n_i\in\mathbb{Z}} \delta(\phi_i - n_i)$$

を用いると，分配関数 (7) は最終的に整数列 $\{n_i\}$ の集合に対する和の形

$$Z = \frac{1}{N!}\sum_{\{n_i\}}(n_i - n_j)^{2-2G} e^{-\frac{\mu A}{2}\sum_{i=1}^{N} n_i^2} \quad (8)$$

に書くことができる．

いま，$G = 0$ とするとこの分配関数 (8) は行列模型の分配関数において行列の固有値空間を離散化したものと見なすことができる．行列模型とは分配関数が $N \times N$ のエルミート行列 M 全体にわたる積分

$$Z = \frac{1}{\mathrm{Vol}(U(N))}\int [dM] e^{-\frac{\tilde{\mu}}{2}\mathrm{Tr}\, M^2}$$

として定義された模型である．ここで分配関数はエルミート行列を対角化するときに生じるユニタリー群の体積 $\mathrm{Vol}(U(N))$ で規格化してある．この分配関数は行列の固有値 λ_i $(i = 1, \cdots, N)$ に対する積分として

$$Z = \int\prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{1\le i<j\le N}(\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-\frac{\tilde{\mu}}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2}$$

と Vandermonde 行列式を用いて書くことができる．ここで，行列の積分において固有値は実数値を取り得るが，この値を整数値のみに制限して離散化したものが 2 次元 Yang–Mills 理論の分配関数というわけである．この意味で以下 (8) の分配関数を「離散化された行列模型」と呼ぼう．

分配関数 (8) はすべての整数列の集合に対する和としているが，$n_i = n_j$ となるようなところではうまく定義されていないので，$n_i \neq n_j$ と制限し，さらに

$$n_1 > n_2 > \cdots > n_N$$

と順番を固定してやることができる．この整数列に対する条件とヤング図形の行の箱の数（分割）に対する条件 (3) とは等号を含むか含まないかの違いであることがわかる．一般に等号を含まない減少整数列 n_i は等号を含む減少整数列 k_i を用いて

$$n_i = k_i - i + c \quad (9)$$

と表すことができる．ここで，c は任意の定数である．

いま，定数 c を $\sum_i n_i = \sum_i k_i$ という条件から決めると $c = \frac{N+1}{2}$ となり，(9) を (8) に代入することで

$$Z = \sum_{\{k_i\}}(k_i - k_j - i + j)^{2-2G} \times e^{-\frac{\lambda A}{2N}\sum_{i=1}^{N}(k_i - i + \frac{N+1}{2})^2} \quad (10)$$

を得る．この分配関数と Migdal の分配関数 (2) を見比べてみるとほとんど同じ形をしていることがわかるが，Migdal の分配関数がヤング図形の箱が全くない状態（$R = \emptyset$ または $\forall k_i = 0$）に対して 1 の項を与えるのに対し，離散化された行列模型は

$$Z_0 = (-i + j)^{2-2G} e^{-\frac{\lambda A}{2N}\sum_{i=1}^{N}(-i + \frac{N+1}{2})^2}$$

を与える．したがって，この Z_0 を用いて離散化された行列模型の分配関数を規格化すると

$$Z/Z_0 = \sum_{\{k_i\}}\left(\frac{k_i - k_j - i + j}{-i + j}\right)^{2-2G} \times e^{-\frac{\lambda A}{2N}\sum_{i=1}^{N}(Nk_i + k_i(k_i - 2i + 1))}$$

となり，BF 理論を 2 次のポテンシャルで変形した理

論，もしくは2次のポテンシャルを持つ離散化された行列模型は Migdal の分配関数と等価であることがわかった．

この離散化された分配関数 (8) を統計力学的な分配関数として眺めてみよう．以下，統計力学系としてうまく解釈できる $G=0$ の場合だけを考える．まず，Vandermonde 行列式，もしくは $\dim R$ の測度の部分は系の状態数（エントロピー）を表し，指数の肩に2次のポテンシャルが乗っている部分はボルツマン因子に対応する．各固有値の値がお互いに離れれば離れるほど自由エネルギーの意味で得になるが，ボルツマン因子からは固有値がなるべくお互いに近づいたほうが得であることがわかる．結局，これら2つの因子の競合によってどのような固有値配位が優勢であるかが決まる．係数 μA が大きく，ポテンシャルによる固有値を集めようとする力が強いと固有値はほとんど原点 $(n_i=0)$ を中心に集まるが，各固有値は同じ値をとることはできないためもっとも固有値が集まった状態でも N 個の固有値が連続的に並んだ状態である．すると，固有値が連続的に並んでいる部分と固有値が存在しない部分で2つの境界が生じるが，これはちょうどフェルミオンが多数存在している基底状態でのフェルミ面に相当する（図1）．ラージ N 極限において (4) のようなカイラル分解が起きることを2次元ゲージ理論の場合に説明したが，このことは離散化された行列模型の立場からは2つのフェルミ面が十分遠くに引き離され，各々のフェルミ面が独立に振る舞うことを意味している．片側のフェルミ面での現象を拡大し分配関数として捉えたときに，それが Gross–Taylor のカイラル分配関数であり（摂動論的な）弦理論としての解釈を持つのである[6,7]．

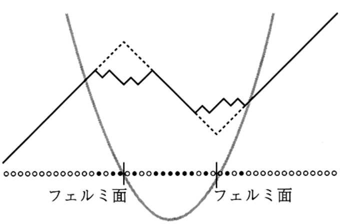


図1　離散化された行列模型の2次ポテンシャル中の固有値分布．黒丸が固有値がある位置，白丸が固有値のない位置を表す．固有値の位置の上に右上がりの線分，固有値がないところに右下がりの線分を書くことでヤング図形と1対1に対応させることができる．

4. もう一つの行列模型

いままで見てきたように2次元の Yang–Mills 理論もしくは離散化された行列模型はラージ N 展開の意味において弦理論の摂動論的振幅を漸近級数の形で自然に含むことがわかった．これは，位相的な弦理論の話だけとは言え弦の世界面を各種数ごとに手で順番に足し上げていかないといけない従来のやり方に比べると大きな進歩である．このような振幅を与える母関数が弦理論ではなく再びゲージ理論を解く問題に帰着されているのも非常に興味深い．

このように理想としては弦理論の摂動論的振幅を自動的に生成するような一般の母関数，さらに言えばDブレインなどの弦理論における非摂動論的状態をも含んだような背後にある理論を知りたいわけである．このような理論を構築する別のアプローチとしてM理論やIIA 型超弦理論に関連して Banks, Fischler, Shenker, Susskind らによって提唱された BFSS 行列模型[8]，IIB 型超弦理論に対しては Ishibashi, Kawai, Kitazawa, Tsuchiya らによって提唱された IKKT 行列模型[9]がある．これらの模型に関して，その理論の持つ弦理論としての意味について模型が提唱されて以来現在も盛んに研究されている．

以下では IKKT 行列模型のほうを取り上げてみよう．IKKT の模型自体は10次元で $\mathcal{N}=1$ の超対称性を持つ超対称 Yang–Mills 理論を0次元まで簡約化したものとして与えられるが，ここでは模型を簡単にするため6次元の $\mathcal{N}=1$ もしくは4次元の $\mathcal{N}=2$ の $U(k)$ 超対称 Yang–Mills 理論を0次元に簡約化した模型を考える．まず，この模型に対してもともとの超対称変換から次の BRST 変換

$$
\begin{aligned}
&QB_l=\lambda_l, \quad Q\lambda_l=[\Phi,B_l], \quad (l=1,2)\\
&Q\bar{\Phi}=\eta, \quad Q\eta=[\Phi,\bar{\Phi}],\\
&Q\Phi=0
\end{aligned}
$$

を構成することができる．ここで，$B_l,\Phi,\bar{\Phi}$ はボソン的な $k\times k$ 行列で*3) 6次元のゲージ場を0次元に次元簡約したもの，λ_l,η はそれらのフォルミオン的なパートナーである．これらの行列に加えて，次の BRST 変換に従う補助的な行列

*3)　Φ を先ほどの BF 理論で出てきた場と混同しないように．

$$QH_i = [\Phi, \chi_i], \quad Q\chi_i = H_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

と基本表現に属し BRST 変換性

$$QI = \psi_I, \quad Q\psi_I = \Phi I,$$
$$QJ = \psi_J, \quad Q\psi_J = J\Phi,$$

を持つ k 次元ベクトル I, J およびそのフェルミオン的なパートナー ψ_I, ψ_J を導入すると，この模型の作用は

$$S = \frac{1}{g_s} Q\Xi(B_l, \bar{\Phi}, H_i, I, J; \lambda_l, \eta, \chi_i, \psi_I, \psi_J; \Phi)$$

と Q–exact な形で書くことができる．ここで，Ξ は

$$\begin{aligned}\Xi =& \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}\eta[\Phi, \bar{\Phi}] + \vec{\chi}\cdot(\vec{H} - i\vec{\mathcal{E}})\right.\\ &+ \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{l=1,2}(\lambda_l^\dagger[B_l, \bar{\Phi}] + \lambda_l[B_l^\dagger, \bar{\Phi}])\\ &\left.+ \psi_I^\dagger\bar{\Phi}I + \psi_I I^\dagger\bar{\Phi} + \psi_J^\dagger J\bar{\Phi} + \psi_J\bar{\Phi}J^\dagger\Bigg)\right]\end{aligned}$$

で与えられ，

$$\mathcal{E}_1 = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J - \zeta,$$
$$\mathcal{E}_2 = [B_1, B_2] + IJ, \quad \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2^\dagger$$

とした．

いま，ボソン的な行列を $\vec{\mathcal{B}} = (B_l, \bar{\Phi}, H_i, I, J)$，フェルミオン的な行列を $\vec{\mathcal{F}} = (\lambda_l, \eta, \chi_i, \psi_I, \psi_J)$ とまとめて書き，Φ に関してはそれ自身が Q–closed でパートナーが存在しないため別個に扱うことにすると，この模型の分配関数

$$Z_k = \int \mathcal{D}\vec{\mathcal{B}}\mathcal{D}\vec{\mathcal{F}}\mathcal{D}\Phi e^{-\frac{1}{g_s}Q\Xi(\vec{\mathcal{B}};\vec{\mathcal{F}};\Phi)} \tag{11}$$

は作用が Q–exact に書けているために実は結合定数 g_s によらない量になる．これは g_s が十分小さい極限（弱結合極限）で計算した結果が厳密になるということを意味し，このような極限の下では分配関数 (11) の積分が，補助場からくる拘束である $\vec{\mathcal{E}} = 0$ の解空間を $U(k)$ ゲージ変換の下で同一視したモジュライ空間

$$\mathcal{M}_{1,k} = \{B_l, I, J | \vec{\mathcal{E}} = 0\}/U(k)$$

の周りで局在化する．実は $\vec{\mathcal{E}} = 0$ という条件は 4 次元のゲージ理論におけるソリトンであるインスタントン解を構成するときに登場する ADHM (Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin) 方程式と呼ばれる物になっており，モジュライ空間 $\mathcal{M}_{1,k}$ は $U(1)$ ゲージ理論の k インスタントンのモジュライ空間と同じものである*4)．結局，分配関数 (11) は k インスタントンのモジュライ空間上で座標をすべて積分することになり，モジュライ空間の“体積”を与えることになる．実際に分配関数 (11) を計算する際にはここに登場した行列に対し質量項を与え積分をうまく正則化する必要があるが，これは質量項によって変形された BRST 変換の固定点

$$[\Phi, B_l] + (-1)^l m B_l = 0$$

のうち ADHM 方程式 $\vec{\mathcal{E}} = 0$ を同時に満たすものを求める問題に帰着する．実はこのような固定点は箱の数が全体で k 個であるようなヤング図形で完全に分類されることが知られている[10, 11]．

きちんと正則化した後で分配関数を積分した結果はすべての固定点の集合に関してある重みを掛けて足し上げたもの

$$Z_k = \mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,k}) = \sum_{|R|=k}\left(\frac{d_R}{k!}\right)^2$$

になり，ここで再びヤング図形と Plancherel 測度が現れた．さらに，Φ の固有値 ϕ_s $(s = 1, \cdots, k)$ の固定点での値がヤング図形の箱の位置のラベル $s = (i, j)$ を用いて

$$\phi_{(i,j)} = m(i - j), \quad (i, j) \in R$$

となるので，例えば BRST コホモロジーに属する物理量の期待値が

$$\langle e^{\tau \mathrm{Tr}\,\Phi}\rangle_k = \sum_{n=0}^{\infty} H_{k,n}^{g,0}\frac{(-m\tau)^n}{n!} \tag{12}$$

と計算できる．ここで，$H_{k,n}^{g,0}$ は (6) で出てきた Hurwitz 数で $G = 0$ とおいたものであり，

$$\mathrm{Tr}\,\Phi = m\sum_{(i,j)\in R}(i - j) = -\frac{m}{2}\kappa(R)$$

となることを用いた．

このことが何を意味するかと言うと，2 次元 Yang–Mills 理論の（カイラル）分配関数はグランドカノニカル分配関数として“粒子数”（行列のサイズ）k を固定した行列模型のカノニカルな期待値 (12) の生成母関数を与えるということである．Hurwitz 数が弦の世界面から標的空間（いまの場合 $G = 0$ の球面）への写

---

*4) 通常は $U(1)$ ゲージ理論にインスタントンは存在できないが，いまの場合非可換空間上の $U(1)$ インスタントンを考えていることと同じになるため可能になる．

像の数という弦理論としての解釈を持つので，行列模型の行列のサイズ k を変えながら足し上げた分配関数が弦理論としての性質を持つ．位相的弦理論なので通常の意味での弦理論とは言えないが，このように無限大までの大きさの行列模型全体のアンサンブルを考えてやることによってその行列模型が弦理論を内包している可能性を持つことが示された．

5. おわりに

いままで見てきたように，弦理論の一部の特徴だけを取り出した位相的弦理論と呼ばれる弦理論ではあるが，2 次元の Yang–Mills 理論，離散化された行列模型や IKKT 型の行列模型の分配関数や振幅と深い繋がりがあることがわかった．そこではヤング図形が重要な役割を演じ，それぞれの理論・模型で様々な意味，解釈を持って登場した．このように同じヤング図形という対象が様々な意味を持つというのは弦理論やゲージ理論における双対性の現れともいうことができる．

一方で今回は紙面の都合により全く述べることができなかったが，3 次元の Chern–Simons ゲージ理論もしくは q 変形された 2 次元 Yang–Mills 理論と呼ばれる理論も同様に（A 模型）位相的弦理論の振幅を再現することが示され，そこでも再びヤング図形，特に平面的に箱を並べた通常のヤング図形ではなく立方体を 3 次元的に配置した立体ヤング図形が本質的な役割を演じる．3 次元の Chern–Simons 理論や q 変形された 2 次元 Yang–Mills 理論では，今回様々な局面で現れたユニタリー群や対称群の表現の次元の表式において整数を q 整数と呼ばれる数

$$[n]_q = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

に置き換えたものが頻繁に登場する．これらの理論は BFSS 型の行列模型との関連も見出され，IIA 型超弦理論や M 理論との繋がりも示唆される．

初めに述べたように弦理論では如何に摂動的な方法によらない定式化をうまくやるかが問題になっている．BFSS 型や IKKT 型の行列模型による定義がもっとも有望な候補であるが，位相的弦理論とは言え行列のサイズが非常に大きい極限でその一端がかいま見えた．行列模型と位相的弦理論で学んだこれらの数学的構造や一般的な教訓はもっと一般で普通の意味での弦理論における非摂動論的な振舞いを考える上で今後重要な意味を持つと思われる．また，その理解において今回重要な役割を演じたヤング図形や組合せ論的な手法が再び活躍し，その本質的な理解はますます重要になるであろう．

参考文献

1) A.A. Migdal, *Sov. Phys. JETP* **42**, 413 (1975) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 810 (1975)].
2) D.J. Gross, *Nucl. Phys. B* **400**, 161 (1993) [arXiv: hep-th/9212149]; D.J. Gross and W.I. Taylor, *Nucl. Phys. B* **400**, 181 (1993) [arXiv:hep-th/9301068].
3) S. Cordes, G.W. Moore and S. Ramgoolam, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **41**, 184 (1995) [arXiv:hep-th/9411210].
4) G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **72**, 461 (1974).
5) A. Okounkov and R. Pandharipande, *Ann. of Math.* **163**, 517 (2006) [arXiv:math.AG/0204305].
6) M. Aganagic, H. Ooguri, N. Saulina and C. Vafa, *Nucl. Phys. B* **715**, 304 (2005) [arXiv:hep-th/0411280].
7) S. Matsuura and K. Ohta, *Phys. Rev. D* **73**, 046006 (2006) [arXiv:hep-th/0504176].
8) T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **55**, 5112 (1997) [arXiv: hep-th/9610043].
9) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B* **498**, 467 (1997) [arXiv: hep-th/9612115].
10) H. Nakajima, "Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces", AMS University Lecture Series (1999).
11) G.W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.* **209**, 77 (2000) [arXiv: hep-th/9803265]; *Commun. Math. Phys.* **209**, 97 (2000) [arXiv:hep-th/9712241].

（おおた・かずとし，東北大学大学院理学研究科）

ゲージ理論とヤング図形

加藤 晃史

1. はじめに

1994 年，Seiberg と Witten[1] は 4 次元 $N=2$ 超対称性を持つゲージ理論の低エネルギー有効理論の厳密解を得ることに成功し，理論物理界に衝撃を与えた．ただ，その導出法は「超対称性からくる正則性と理論の双対性を仮定すると，この解しかない」というものであって，経路積分を実行して求めたわけではなかった．特に，Seiberg–Witten 曲線とその上の有理型微分（Seiberg–Witten 微分）の由来は全く謎であった．その後，Nekrasov は超対称性と Ω 背景という考え方に基づき経路積分を形式的に実行して分配関数の公式（Nekrasov 公式）を求め，それが Seiberg–Witten の厳密解と一致するであろうと予想した．両者は導出法も表式もまるで異なりこの予想はしばらく未解決であったが，2003 年にゲージ群が $G=U(r)$ のときにランダム分割の考え方を用いて Nekrasov–Okounkov[2] によって証明された．全く独立に中島–吉岡[3]，Braverman–Etingof[4] による別証明も知られている．

Nekrasov–Okounkov の証明を眺めていると，ヤング図形[*1] を集めて融かしたら，いつの間にか Seiberg–Witten 曲線の形になってしまった感があり，ゲージ理論とヤング図形の関係を考える上で恰好の素材であると考えられる．本稿では，その詳細を紹介することはできないが，エッセンスを（私見を交えながら）紹介しよう[*2]．

*1）歴史的には Ferrers 図形と呼ぶほうが正しいらしい．

*2）この論説の準備中，Andrei Okounkov が 2006 年度フィールズ賞を受賞したというニュースが飛び込んできた．ペレルマンの受賞辞退の騒ぎの影に隠れてしまったのは残念だ．

2. ヤング図形と輪郭関数

自然数の列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\cdots)$ が $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_s\geq\cdots\geq 0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_s+\cdots=n$ をみたすとき，λ を n の分割（partition）と言い，$\lambda\vdash n$ と書く．また，$|\lambda|:=n$ を λ の次数と言う．このとき全部で n 個の正方形を第 1 行に λ_1 個，第 2 行に λ_2 個，という具合に左詰めで並べたものをヤング図形と言う（図 1 左）．ヤング図形の縦横を入れ替えてできる別のヤング図形に対応する分割を $\tilde{\lambda}$ で表し，λ の転置と言う．本稿ではヤング図形と分割をほぼ同義語として使うことにする．

ヤング図形と等価な情報を与えるものとして，輪郭関数（profile function）がある．輪郭関数とは，図 1 の右図における太めの実線のようにヤング図形を反時計方向に 135° 回転して得られる図形の上側の縁をグラフとする区分線型関数で，具体的に式で書けば

$$f_\lambda(x)=|x|+\sum_{i=1}^{\infty}\Big(|x-\lambda_i+i-1|-|x-\lambda_i+i| + |x+i|-|x+i-1|\Big)$$

となる．また転置に関して $f_{\tilde{\lambda}}(x)=f_\lambda(-x)$ となることも明らかだろう．輪郭関数はヤング図形を箱の集まりと見ずに，1 次元的な折れ線（経路）と見たわけだが，あとで見るように経路積分的な考え方との相性が良い．

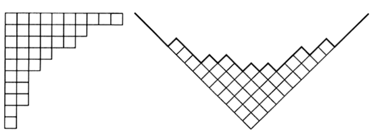


図 1　ヤング図形と輪郭関数．

3. 非可換 Fourier 変換と Plancherel 測度

ヤング図形とゲージ理論との関係を云々する前に，Fourier 変換について思い出そう．ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には，$\mathbb{R}^n$ 自身が平行移動として作用し，平面波 $e^{2\pi i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ はその同時固有ベクトルである．Fourier 変換とは粗っぽく言うと，どのような関数 $f(\boldsymbol{x})$ もこのような平面波の重ね合わせとして表せるという主張であった．Plancherel の定理は，「$f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\boldsymbol{x}) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n, d\boldsymbol{p})$ であり，$\|f\| = \|\hat{f}\|$ が成り立つ.」という定理で，Fourier 変換が等長変換であることを主張している．

量子力学ではユニタリ変換で互いに移り合う記述は全く等価である．Fourier 変換の存在は，実空間と運動量空間の記述が全く等価であることを意味する．実際，場の理論の散乱振幅の計算（Feynman 規則）は，大抵は実空間ではなく運動量空間で計算される．

平行移動の群は可換群であるが，Fourier 変換（展開）の非可換ヴァージョンもある．

G を任意のコンパクト位相群，$\mathfrak{H}$ をその上の両側不変 Haar 測度とする．（G が離散群のときは，$\mathfrak{H}$ は数え上げ測度.）G の共役（随伴）作用 $g \mapsto hgh^{-1}$ をゲージ対称性と見なそう．G 上の関数で各共役類に制限すると定数になっているものを類関数と言う．ゲージ変換で移り合うものは物理的に区別できないので，我々が興味ある量は類関数のみと言ってよい．類関数の集合を $L^2(G, \mathfrak{H})^{\mathrm{Ad}}$ で表すことにしよう．

$\pi : G \to GL(V)$ を G の表現とするとき，その指標 χ_π は類関数である．$\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現の同型類全体とする．Peter–Weyl の定理によれば $\{\chi_\pi : \pi \in \hat{G}\}$ は Hilbert 空間 $L^2(G, \mathfrak{H})^{\mathrm{Ad}}$ の完全正規直交系をなし，G 上の任意の類関数は既約ユニタリ表現の指標の線形結合で一様に近似できる．

$G = U(1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の場合は通常の Fourier 展開の理論に他ならず，上の事実は Fourier 展開の理論の非可換版と言える．類関数 $f \in L^2(G, \mathfrak{H})^{\mathrm{Ad}}$ と既約指標 $\chi_\pi(g)$ との重なり積分 $\int_G f(g)\overline{\chi_\pi(g)}\mathfrak{H}$ が Fourier 係数にあたり，これを $\hat{G}$ 上の関数と見て f の Fourier 変換 $\hat{f}$ が定まる．

$\hat{G}$ 上の Placherel 測度 $\mathfrak{P}$ とは，Fourier 変換

$$L^2(G, \mathfrak{H})^{\mathrm{Ad}} \to L^2(\hat{G}, \mathfrak{P}), \quad f \mapsto \hat{f}$$

が等長変換 $\|\hat{f}\| = \|f\|$ となるような測度として特徴付けられる．

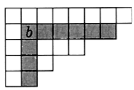
G と $\hat{G}$ はまるで異なる構造を持つが，Fourier 変換のおかげでゲージ群 G の理論を $\hat{G}$ の言葉だけで定式化できることになる．

4. $\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論とヤング図形

ゲージ理論のおもちゃとして，G が対称群の場合に前節の話を具体化しよう．これを「$\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論」と呼ぶことにする．

出発点となるのは「n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現は箱の数が n のヤング図形と一対一に対応する」という事実である．ヤング図形から表現をどう構成するかは多くの教科書で解説されているのでここでは省略する．前節の議論から，$\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論は n 次のヤング図形の集合 $\hat{\mathfrak{S}}_n \simeq \mathcal{Y}_n = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$ 上の量子力学として定式化されるはずだ．その際，積分への寄与を決める Plancherel 測度は最も基本的な量であると言える．これはヤング図形からどのように計算されるだろうか？

一般に，関係式 $\sum_{\pi \in \hat{G}} (\dim \pi)^2 = |G|$ により，$\mathfrak{P}(\pi) := (\dim \pi)^2/|G|$ と置けば $\mathfrak{P}$ は $\hat{G}$ 上の測度となる．実はこれが Plancherel 測度に他ならないことが指標の直交関係式からわかる．したがって，測度を知るには既約表現の次数（次元）がわかればよく，$\mathfrak{S}_n$ の場合には次のような綺麗な公式が知られている．ヤング図形 λ とその中の一つの箱 b に対し，b から見て右または下にある箱全体（b 自身も含む）を b を角とする鉤（かぎ）（hook）と言い，鉤に含まれる箱の数 $h(b)$ を鉤の長さ（hook length）と言う．例えば



では，b を角とする鉤は影を付けた部分で，その長さは 9 である．一般に，b が位置 (i, j) にある箱のとき，$h(b) = \lambda_i + \tilde{\lambda}_j - i - j + 1$ となる．

定理 1（Hook length formula）　$\lambda \vdash n$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現（これも同じ λ で表す）の次数は

$$\dim \lambda = n! \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1}{h(\square)}$$

で与えられる．ただし，積は，ヤング図形 λ のすべての鉤にわたる．——

例えば $\lambda =$  のときは $\dim \lambda = 5!/(4{\cdot}3{\cdot}1{\cdot}2{\cdot}1) =$



図 2　ヤング図形の連続極限．

5 である．

結局，$\lambda \in \mathcal{Y}_n$ の Plancherel 測度は

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \frac{(\dim\lambda)^2}{n!} = n! \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)^2} \qquad (1)$$

と表されることがわかった．

5. ヤング図形の連続極限

Plancherel 測度 $\mathfrak{P}$ に関しては非常に興味深い研究がある．Logan–Shepp[7), Vershik–Kerov[8)] は，$n \to \infty$ のときに $\mathfrak{P}$ がどのように振る舞うかを解析した．彼らは図 2 のように，ヤング図形の面積が一定になるように箱の辺の長さを $1/\sqrt{n}$ に縮めながら $n \to \infty$ の極限をとると，Plancherel 測度 $\mathfrak{P}$ が

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(x \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}\right) & |x| \le 2, \\ |x| & |x| \ge 2 \end{cases}$$

という極限形 (limit shape) に台を持つ δ 関数的測度に収束することを明らかにした．図 2 の右端は $\Omega(x)$ のグラフを描いたものである．ゲージ場のゆらぎは，ヤング図形あるいは輪郭関数のゆらぎに対応している．ところが，n が非常に大きい極限でダイナミクスは単純化され，何度観測しても，系はほぼ確率 1 で極限形の輪郭関数に対応する既約表現の状態にあり，その意味でゆらぎのない古典的な状況になっている．

彼らの解析をやや詳しく述べよう．ヤング図形 λ を反時計方向に 90° 回転したものの連続極限は，図 3 の斜線部のようなある連続単調減少関数 $v = \phi(u)$ のグラフで囲まれた領域 D となる．個々の箱は小さすぎて見えないが，(u, v) を角とする鉤の長さは $h(u,v) = \phi(u) + \phi^{-1}(v) - u - v$ で与えられる．Plancherel 測度 (1) の主要部

$$\mathcal{E} := \log \prod_{\square\in\lambda} h(\square)^2 = 2 \sum_{\square\in\lambda} \log h(\square)$$

は，連続極限では積分

$$\mathcal{E} = 2 \iint_D \log h(u,v)\, du dv$$

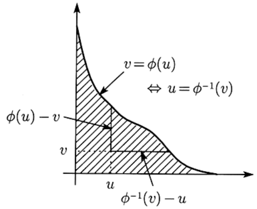


図 3　ヤング図形の連続版 D（斜線部）と (u,v) を角とする鉤．

に置き換わる．図 3 をさらに 45° 反時計方向に回転したものが輪郭関数 $y = f(x)$ であり，

$$\begin{cases} f(x) \ge |x|, & |f'(x)| \le 1, \\ f(x) = |x| & (|x| \gg 0) \end{cases} \qquad (2)$$

をみたす．うまく変数変換して $\mathcal{E}$ を計算すると，

$$\mathcal{E}[f] = \frac{1}{4} \iint_{t<s} f''(s) f''(t) \times (s-t)^2 \left(\log(s-t) - \tfrac{3}{2}\right) ds\, dt \qquad (3)$$

となることがわかる．Plancherel 測度が $\mathfrak{P} \propto \exp(-\mathcal{E})$ であることに注意すると，$\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論の分配関数は (2) をみたすすべての輪郭関数にわたる和として

$$Z = \sum_f \exp(-\mathcal{E}[f]) \qquad (4)$$

で与えられる．これはまさしく「経路積分」である．先に述べた極限形 $\Omega(x)$ は，$\mathcal{E}$ の最小値を与える古典解に他ならない．

6. ゲージ理論の分配関数とインスタントン

おもちゃのゲージ理論で遊んでばかりいると怒られそうなので，物理で言うゲージ理論に話を戻そう．ゲージ理論の分配関数は，すべての接続 A のゲージ同値類 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の経路積分

$$Z = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \mathcal{D}A\, e^{-\beta\|F\|^2+\cdots}$$

で与えられるが，これは無限次元の積分で数学的厳密性を欠く．経路積分を評価するには，通常 $\beta \to \infty$ の極限で主要な寄与を与える $\|F\|^2$ の極値（運動方程式 $\nabla * F = 0$ の解，古典解）を探し，次にその周りで鞍点法を用いる．一般には各古典解の周りのゆらぎの効果（量子補正）の見積りが困難だが，超対称性があると量子補正がボソンとフェルミオンの間で打ち消し合うので，積分範囲をそのような古典解に限定してよいと期待される．

超対称性を保つ古典解として instanton がある．ゲージ場の曲率 F が反自己双対方程式 $F + *F = 0$ を満たすとき，(反) instanton と呼ばれる．instanton は曲率の大きなところが点状に局在しており，このピークの数（正確には第 2 Chern 数 $n = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F^2$）を instanton 数と言う．instanton 解は連続変形が可能で，$U(r)$ ゲージ理論の場合は実 $4rn$ 次元多様体（モジュライ空間*3)）$\mathcal{M}(r,n)$ で分類される．したがって超対称ゲージ理論の経路積分は，instanton 数 n に関する和と instanton モジュライ空間上の積分を併せた

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{M}(r,n)} e^{-\beta\|F\|^2+\cdots}$$

のような形になると期待される．超対称性のおかげで経路積分が有限次元積分に帰着されたが，$\mathcal{M}(r,n)$ は特異点を持った非コンパクトな空間で，まだ Z がきちんと確定したとは言い難い．

7. Seiberg–Witten 解

$G = U(r)$ というゲージ対称性は低エネルギーでは極大トーラス $U(1)^r$ に自発的に破れ，相互作用の弱いところでは vector multiplet に含まれる scalar 場の真空期待値 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_r) \in \mathrm{Lie}\, U(1)^r$ が理論のモジュライ空間の局所座標をなす．N=2 超対称性の一般論から，低エネルギー有効作用は prepotential $F(\boldsymbol{a}, \Lambda)$ によって決定される．ここで $\Lambda = \exp(-4\pi\beta/r)$ は dynamical scale（繰り込み点を決めるパラメータ）である．

Seiberg と Witten は，超対称性から来る F の正則性と，双対性から期待される特異点の周りのモノドロミーを摂動計算から求め，prepotential を特徴づけることに成功した．

定理 2（Seiberg–Witten） $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_r) \in \mathbb{C}^r$ をパラメータとする種数 r の超楕円曲線

$$C_{\boldsymbol{u}} = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : \Lambda^r\big(w + w^{-1}\big) = P(z) := z^r + u_1 z^{r-1} + \cdots + u_r\Big\} \quad (5)$$

とその上の有理型微分 $dS = \frac{z}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{dw}{w}$ の族を考える．また，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_r$ を $H_1(C_{\boldsymbol{u}}, \mathbb{Z})$ の標準的な基底とする．このとき，prepotential $F(\boldsymbol{a}, \Lambda)$ は，a_i および $a_i^\vee = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial F(\boldsymbol{a},\Lambda)}{\partial a_i}$ が dS の周期 $a_i = \int_{\alpha_i} dS$, $a_i^\vee = \int_{\beta_i} dS$ になるものとして特徴付けられる．

8. 同変積分と局所化

Nekrasov は経路積分を本当に実行してゲージ理論の分配関数を求められないかと考えた．彼は Ω 背景と呼ばれる方法を開発したが，これは本質的に以下の同変積分のアイデアに他ならない．

$T = \mathbb{C}^*$ が複素多様体 X に作用し，その固定点集合 X^T が孤立した点の集まりとする．さらに $U(1) \subset T$ の作用がシンプレクティック構造 ω に関するハミルトニアン $H : X \to \mathbb{R}$ で生成されるとする．T の Lie 環の元 $t \in \mathrm{Lie}(T) \simeq \mathbb{C}$ は，各固定点 x の接空間 $T_x X$ の線型変換を引き起こす．このとき，Atiyah–Bott–Duistermaat–Heckman 同変局所化公式によれば

$$\int_X e^{\omega - 2\pi t H} = \sum_{x \in X^T} \frac{e^{-2\pi t H(x)}}{\det t|_{T_x X}}$$

が成り立つ．これは「鞍点法が厳密な結果を与える」ことを主張する結果で，実際 T–作用の固定点は H の臨界点であり，右辺の各項は鞍点法での寄与の総和である．ここで H と ω を共に 0 にスケールさせた極限として，同変積分

$$\int_X 1 := \sum_{x \in X^T} \frac{1}{\det t|_{T_x X}}$$

が定義できる．同変「積分」が実は単なる「和」になっていることに注意しよう．

Donaldson[5)]によれば，$\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ の正則ベクトル束を用いて instanton が記述できる．これによりモ

*3) ここではゲージ変換を無限遠で自明なもの $\mathcal{G}_0 = \{g : S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \to U(r), g(\infty) = 1\}$ に限定したいわゆる framed moduli space を考えている．

ジュライ空間は自然に複素シンプレクティック多様体となり，また torsion free sheaf のモジュライ空間を考えて自然なコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}(r,n)}$ が可能で，空間回転 $U(1)^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2$ と無限遠での局所自明化の取り替え $U(1)^r$ が自然に作用する．こうして $t=(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2)\in \mathrm{Lie}\,(U(1)^r\times U(1)^2)$ の関数として，数学的にも厳密な形で状態和

$$
\begin{aligned}
Z(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) &= Z^{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) \\
&\quad \times Z^{\mathrm{inst}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda), \\
Z^{\mathrm{inst}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2rn} \int_{\overline{\mathcal{M}(r,n)}} 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

が定義されたことになる．ただし，Z^{pert} は $\Lambda=0$ の周りのゆらぎの寄与を表している．

9. 固定点とヤング図形

階数 $r=1$ の場合*4)，$\overline{\mathcal{M}(1,n)}$ の固定点がヤング図形でパラメトライズされるということを説明しよう．2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の部分集合 I が $f\in I, g\in\mathbb{C}[x,y] \Rightarrow fg\in I$ を満たすとき，イデアルであると言う．階数 1 の torsion free sheaf とはイデアルに他ならない．T の $\mathbb{C}^2$ への作用の固定点は原点 $(0,0)$ のみであるが，$\mathbb{C}[x,y]$ のイデアルで T–不変なものは無数にあり，単項式から生成されるイデアルなら何でもよい．

例えばイデアル $I=(x^5,x^3y,x^2y^2,y^3)$ に含まれる単項式を列挙すると，図 4 の太線の右下側，白地の部分になる．I に含まれない単項式全体（影の部分）はヤング図形のように見えるが，これは偶然ではなく，イデアルの性質 $f\in I \Rightarrow xf, yf\in I$ から導かれる．

1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
y	xy	x^2y	x^3y	x^4y	x^5y
y^2	xy^2	x^2y^2	x^3y^2	x^4y^2	x^5y^2
y^3	xy^3	x^2y^3	x^3y^3	x^4y^3	x^5y^3

図 4　単項式イデアル $I=(x^5,x^3y,x^2y^2,y^3)$ と対応するヤング図形．

*4)　$U(1)$ ゲージ理論には滑らかな instanton 解は存在しないのだが，代用物であるイデアルはきちんと定義される．

こうして，T–不変イデアルがヤング図形と一対一に対応することがわかった．

同様の議論により，階数 r の torsion free sheaf の場合も $\overline{\mathcal{M}(r,n)}$ の固定点は，$n=\sum_k |\lambda^{(k)}|$ をみたす r 個のヤング図形の組 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(r)})$（$r$ 色の色付き分割）でラベルされることがわかる．

10. Nekrasov の公式

Nekrasov はモジュライ空間の ADHM 構成[6]に同変積分を適用し，分配関数 (6) を評価した．その結果，摂動的寄与は

$$
\begin{aligned}
&Z^{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) \\
&= \prod_{l,k=1}^{r}\prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{a_l-a_k+\epsilon_1(i-1)+\epsilon_2(j-1)}{\Lambda}
\end{aligned}
$$

で与えられ，instanton 部分は r 色の色付き分割 $\boldsymbol{\lambda}$ の寄与の和

$$
\begin{aligned}
&Z^{\mathrm{inst}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} Z_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda), \\
&Z_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) \\
&= \prod_{l,k=1}^{r}\prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{a_l-a_k+\epsilon_1(i-1)+\epsilon_2(-j)}{a_l-a_k+\epsilon_1(i-\tilde{\lambda}_j^{(k)}-1)+\epsilon_2(\lambda_i^{(l)}-j)}
\end{aligned}
$$

で与えられることを見出した．ここに，$\tilde{\lambda}$ は λ の転置を表す．これらを Nekrasov の公式と言う．

上の式は無限積の形をしているので，正確には正則化が必要である．いま

$$
\gamma_{\epsilon_1,\epsilon_2}(x;\Lambda) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}e^{-tx}dt}{(e^{t\epsilon_1}-1)(e^{t\epsilon_2}-1)}
$$

と置くと，摂動的寄与は

$$
Z^{\mathrm{pert}}(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) = \exp\Bigl(-\sum_{l,k=1}^{r} \gamma_{\epsilon_1,\epsilon_2}(a_l-a_k;\Lambda)\Bigr)
$$

と表される．

Nekrasov は，$Z(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda)$ が cut-off パラメタ ϵ_1,ϵ_2 を 0 に近づけたとき Seiberg–Witten 理論の prepotential $F(\boldsymbol{a},\Lambda)$ と

$$
Z(\boldsymbol{a},\epsilon_1,\epsilon_2,\Lambda) = \exp\Bigl(\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}F(\boldsymbol{a},\Lambda)+\cdots\Bigr)
$$

という関係にあることを予想した．

11. 古典解としての Seiberg–Witten 曲線

5 節では，$\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論の分配関数が輪郭関数 f に関する経路積分という形で表され，連続極限で曲線 $\Omega(x)$ が古典解として現れることを見た．Nekrasov–Okounkov は，同様なメカニズムにより Seiberg–Witten 曲線が現れることを見抜いたのである．

まず，同変積分に伴って導入された変数 $t = (\boldsymbol{a}, \epsilon_1, \epsilon_2)$ と，色付き分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(r)})$ の情報を反映した輪郭関数を構成しなくてはならない．以下では $\epsilon_1 < 0 < \epsilon_2$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ と仮定しよう．

分割 λ からヤング図形を作る際，辺が 1 の正方形ではなく縦 $-\epsilon_1$・横 ϵ_2 の長方形を用いたものを考え，それを 135° 回転して得られる輪郭関数を考える（図 5 参照）．式で書けば，

$$
\begin{aligned}
&f_\lambda(x|\epsilon_1, \epsilon_2) \\
&= |x| + \sum_{i=1}^{\infty} \Big\{ |x - \epsilon_2 \lambda_i - \epsilon_1 (i-1)| \\
&\quad - |x - \epsilon_2 \lambda_i - \epsilon_1 i| + |x - \epsilon_1 i| - |x - \epsilon_1 (i-1)| \Big\}
\end{aligned}
$$

という区分線型関数になる．ヤング図形 $\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(r)}$ の各々からこのような輪郭関数を作り，それらを a_k に応じてシフトして重ね合わせた関数

$$
f_{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\lambda}}(x|\epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_{k=1}^{r} f_{\lambda^{(k)}}(x - a_k|\epsilon_1, \epsilon_2)
$$

が我々が求めるものである．すると，Nekrasov の公式は輪郭関数に関する「経路積分」

$$
\begin{aligned}
Z^{\mathrm{inst}}(\boldsymbol{a}, \epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \exp\big(-\mathcal{E}[f_{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\lambda}}(*|\epsilon_1, \epsilon_2)] \big), \\
\mathcal{E}[f] &= \frac{1}{2} \iint_{t<s} f''(s) f''(t) \gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}(s - t|\Lambda) ds dt
\end{aligned}
\tag{7}
$$

として表せることが確かめられる．

今や $N=2$ $U(r)$ ゲージ理論の分配関数 (7) と，お

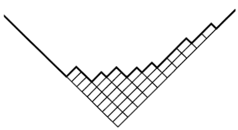


図 5　長方形版ヤング図形とその輪郭関数．

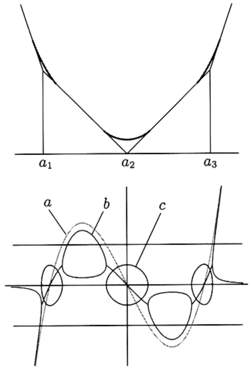


図 6　（上）$\mathcal{E}$ の最小値を与える古典解 f_*.
（下）Seiberg–Witten 曲線 $w + w^{-1} = P(z)$. a: $P(z)$, b: $\mathrm{Re}\, w(z)$, c: $\mathrm{Im}\, w(z)$.

もちゃの $\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論の分配関数 (3), (4) の類似は誰の目にも明らかだ．強いて違いを挙げるならば，和をとる輪郭関数 f として，前はグラフ $y = |x|$ の角を削ったような (2) をみたす関数だったのが，今回は色付きヤング図形の輪郭関数であることを反映し，図 6（上）のように関数 $\sum_{i=1}^{r} |x - a_i|$ の r 箇所ある角を削って丸めた

$$
f(x) = \sum_{k=1}^{r} |x - a_k| + \rho(x), \quad \rho(x) \geq 0
$$

と表される関数に置き換わっている．

しかし，違いはそれだけである．4 次元 $N=2$ ゲージ理論といえども，我々が $\mathfrak{S}_n$ ゲージ理論と呼んだものの変形にすぎない！ 実際，$\mathcal{E}$ に現れる積分核 $\gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ は，$\hbar \to 0$ において

$$
\gamma_{-\hbar, \hbar}(x; \Lambda) = \frac{1}{2\hbar^2} \left(x^2 \log \frac{x}{\Lambda} - \frac{3}{2} x^2 \right) + \cdots
$$

と漸近展開され，(7) の汎関数 $\mathcal{E}[f]$ は (3) と完全に一致する．

前と同様，$\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ の熱力学的極限で輪郭関数 $f(x)$ は連続関数と見なしてよく，また汎関数 $\mathcal{E}$ の凸性により，経路積分の寄与はただ一つの古典解 f_* に集中する．Seiberg–Witten prepotential は

$$
F(\boldsymbol{a}, \Lambda) = -\min_f \mathcal{E}[f] = -\mathcal{E}[f_*]
$$

で与えられることになる．

このような条件付きの汎関数極値問題は，行列模型等においてよく登場するタイプのもので，resolvent を導入して解くことができる．Nekrasov–Okounkov は，最小値を与える曲線が本質的に Seiberg–Witten 曲線 (5) であることを示した．すなわち $w+w^{-1}=P(z)$ を z をパラメータとする w に関する 2 次方程式と見てその根を $w(z)$ とすれば，r 箇所を丸めることと曲線の種数 r が対応し，$\mathrm{Im}\,w(z)$ が輪郭関数の角の丸め方を指定する $\rho(x)$ を与える．また，輪郭関数はちょうど Seiberg–Witten 微分の不定積分 $\mathrm{Re}\int_{x_0}^{x} dS$ のグラフになっていることもわかる．このあたりの解析も大変興味深いのだが，もう予定の紙数を越えてしまったので，詳しくは原論文を参照していただきたい．

ヤング図形とゲージ理論の関係は，新しい時代を迎えたと言ってよいだろう．

参考文献

1) N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19–52; *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 484–550.
2) N. Nekrasov, A. Okounkov, “Progress in Mathematics” **244** pp.525–596 Birkhäuser (2006), hep-th/0306238.
3) H. Nakajima, K. Yoshioka, *Invent. Math.* **162** (2005) 313–355; *Transf. Groups* **10** (2005) 489–519.
4) A. Braverman, *math.AG*/0401409; A. Braverman, P. Etingof, *math.AG*/0409441.
5) S.K. Donaldson, *Comm. Math. Phys.* **93** (1984) 453–460.
6) M.F. Atiyah, V.G. Drinfeld, N.J. Hitchin, Yi.I. Manin, *Phys. Lett.* **A65** (1978) 185–187.
7) B.F. Logan, L.A. Shepp, *Adv. Math.* **26** (1977) 206–222.
8) A. Vershik, S. Kerov, *Soviet Math. Dokl.* **18** (1977) 527–531.

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

岡田　聡一

Young 図形と出会った頃

Young 図形と付き合い始めてからもう 20 年以上たっている．

私が初めて Young 図形に出会ったのは，大学 4 年生の数学講究（セミナー）で B. Kostant の論文 "The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple group" (*Amer. J. Math.* **81** (1959), 973–1032) を読んだとき（正確には，指導教官による内容説明を聞いたとき）である．そのときのノートを見直してみると，「複素単純 Lie 環の exponents を大きい順に並べてできる分割の Young 図形と，正ルートを高さごとに数えてできる分割の Young 図形が互いに共役（転置）の関係にある」という内容が，Young 図形とともに書かれている．この主張は，分割という 1 次元的なものが，Young 図形という 2 次元的なもので表されることによって，新たな対称性（転置）が見えてくるという，Young 図形の有効性を示している．しかし，このときは論文の内容を追うのが精一杯で，Young 図形にこれほどはまってしまうとは思っていなかった．

Young 図形のおもしろさ，奥の深さに目覚めたのは，大学院に入って，R. Stanley の論文 "A baker's dozen of conjectures concerning plane partitions" (*Springer Lecture Notes in Math.* **1234** (1986), 285–293) に触発されて，関連する論文などを読み，自分で Young 図形を触るようになってからである．Young 図形を用いることで，様々なものが具体的に，また美しい形で表現されること，そして，手で（あるいは計算機で）実際に計算できるようになることに気付いたのが，Young 図形を好きになった理由の一つかもしれない．そして，平面分割（3 次元 Young 図形，plane partition）の数え上げ問題に関する修士論文を書いて以来，これまでに書いた論文のほとんどすべてに Young 図形が現れている．

私が大学院生であった頃（1980 年代後半）を思い出して見ると，Young 図形の組合せ論や，関連する表現論を扱った本はほとんど出版されていなかった．例えば，当時興味を持った Robinson–Schensted–Knuth 対応について書かれた本は，

- D.E. Knuth, "The Art of Computer Programming, Volume **3**: Sorting and Serching", Addison–Wesley, 1973

しかなく，その様々な性質については原論文に当たらなければならなかった．しかし，現在では，右ページにあげた Stanley の本や，

- B.E. Sagan, "The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions", Grad. Texts in Math. **203**, Springer, 2001
- W. Fulton, "Young Tableaux", London Math. Soc. Student Texts **35**, Cambridge Univ. Press, 1997

などで，丁寧に解説されるようになっている．

また，当時は対称群や古典群の表現論に関する本も充実していなかった．もちろん，当時から名著の誉れ高かった

- H. Weyl, "The Classical Groups: Their Invariants and Representations", Princeton Univ. Press, 1946

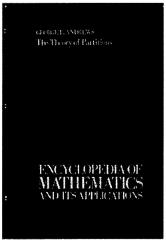
はあったが，敷居が高く読みやすいものではなかった．これ以外では，岩堀長慶，G. James and A. Kerber, D. Littlewood, F. Murnaghan の本があった程度である．これに比べると現在では，表現論に関する読みやすい本が数多く出版されている．上にあげた Sagan, Fulton の本以外にも，

- W. Fulton and J. Harris, "Representation Theory: A First Course", Grad. Texts in Math. **129**, Springer, 1991
- R. Goodman and N.R. Wallach, "Representations and Invariants of the Classical Groups", Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **68**, Cambridge Univ. Press, 1998

はいずれも推薦に値するものである．

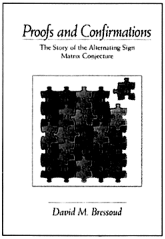
（おかだ・そういち，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

The Theory of Partitions



George E. Andrews, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **2**, Addsion–Wesley, 1976.

分割（Young 図形）をメインテーマとした数少ない本の一つである．分割とその母関数の理論が，組合せ論的な側面，解析的な側面，整数論的な側面からバランスよく解説されている．出版されてから 30 年たっているので，最近の結果などを補う必要があるが，この本をきっかけにして分割の世界に足を踏み入れることができる良書である．また，ほとんど予備知識を仮定していない G.E. Andrews and K. Eriksson, "Integer Partitions" (Cambridge Univ. Press, 2004) もおすすめである．



Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture

David M. Bressoud, Cambridge Univ. Press, 1999.

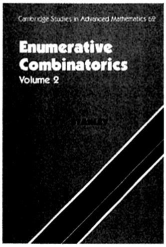
本書は，交代符号行列（alternating sign matrix）の個数に関する Mills–Robbins–Rumsey 予想の提示からその解決に至るまでの道筋を詳細に解説したものである．関連する平面分割（plane partition）の数え上げ問題などが扱われ，数え上げ組合せ論への入門書としても適当である．関係者たちの証言や裏話なども書かれており，実際に研究がどのように進展してきたかがわかる読み物としても楽しめる．

Symmetric Functions and Hall Polynomials



Ian G. Macdonald, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, 1979.

対称関数の理論の "the Book"（バイブル）である．第 1 章を読めば対称関数の基礎を学ぶことができる．Hall–Littlewood 対称関数や Macdonald 対称関数などの Schur 関数の拡張も扱われており，これらの対称関数と表現論との関係も解説されている．また，対称関数の関係式（公式）や関連する話題が，Example (Exercise) の形で多数紹介されている．



Enumerative Combinatorics Vol.1, 2

Richard P. Stanley, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49, 62, Cambridge University Press, 1997, 1999.

数え上げ組合せ論のすべてがこの 2 巻につまっていると言っても過言ではない．この分野の様々な手法や結果がうまくまとめられている．Young 図形が最も登場するのは Chap.7, Symmetric Functions であるが，それ以外にも各所に Young 図形に関連する話題が現れている．本書の特色は，[1]（簡単な演習問題）から [5]（未解決問題）の 5 段階にランクづけされた多数の演習問題が，略解や参考文献とともに各章末につけられていることである．これらの演習問題から研究課題を見出すこともできる．



現代物理数学への招待

ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理

鈴木淳史著，B5 判，208 頁，本体 1876 円，サイエンス社

本書は現代の統計物理学における様々な物理数学を，「ランダムウォーク」という切り口から論じたものである．取り上げられる話題は，確率論，組合せ論，対称多項式論，ビラソロ代数，結晶面の統計力学，q 類似の解析や q–直交多項式などで，驚くほど多岐にわたる．これらの材料は手際良く持ち込まれ，それぞれに固有の（いわば教科書風な物理数学的）方法で展開され，ただちにランダムウォークとのつながりが明らかにされてゆく．もちろん，これほど見かけが異なる話題の関わりが単純であるはずはなく，本書の醍醐味はまさにその関係の深さや不思議さを体験させてくれることにある．

拳銃を持った酔っぱらいたちが夜の街を徘徊する…

悪意ある（vicious）彼らはもうすっかり酩酊して街を千鳥歩きしているが，出会い頭に打合いを始めてしまうだろう．この物騒な「vicious walker」たちのたどる運命や如何に…

同一点にくると未来がない（殺し合いになってしまう）vicious walker のランダムウォークが，パウリの排他原理を介して自由フェルミオンと等価であることが示される（第 2 章）．この書き換えは，前書きにあるように「いくつもの違った問題の間に不思議な橋がわたされる」ことを意味する．

第 3・4 章では，自由フェルミオン，自由ボゾン，組合せ論，対称多項式論などをめぐる数学を学ぶ．いわゆる「マヤ図形」の黒玉と vicious walker たちに自然な対応をつけることが目標とされる．ボゾンの演算子に慣れることは，実は，次章のビラソロ代数の表現論のための肩ならしと見なすこともできよう．また，章末の練習問題には，このようなフェルミオン算法がソリトン方程式を学ぶためにも欠かせない数学でもあることが示唆されていて面白い．

第 5 章にはビラソロ代数とその表現論についての記述がある．少ない紙数にビラソロ代数とその表現論の面白いところが凝縮されているのは圧倒的であり読み応えがある．ビラソロ指標とランダムウォークの鏡像法との関連も新鮮である．2 次元の共形場の理論になじみがない読者にとっては，数学一本やりの議論で物理がそぎ落とされている感じがするかもしれないが，このビラソロ代数の表現論がまさに我々の興味の対象である物理系が属するユニバーサリティークラスの代表元を与えていることを忘れてはならない．具体的な模型から出発する話は次章以降に登場させられる．

第 6 章では，結晶面の統計物理学において，一点関数をめぐる様々な歴史的発展を追体験することができる．この分野は，量子群や共形場の理論などの可積分系の数理が発見されるための土壌となり，汲めども尽きない美しい泉となった．著者の情熱的な語り口で様々な奇跡が語られる．バクスターの驚くべき発見から，様々な指標公式が導かれる様子を学ぶ．

q 類似の解析はそれ独自の興味でラマヌジャンを含む数学者たちによって深化させられてきたものである．しかし（むしろ当然というか），q 類似の解析は，数理物理学にしばしば現れる．第 7 章では，q 超幾何関数，ロジャース・ラマヌジャン恒等式，ベイリーの補題などを経てビラソロ指標の恒等式に関する q 解析を学ぶ．第 8 章は q–直交多項式の親玉であるアスキー・ウィルソン多項式と関連する数理物理を扱う．

本書の特色は，非常に多くの統計力学・数理物理の話題を扱いながら，ただの羅列式の記述に終わらせないいろいろな工夫がほどこされていることである．ある程度の力量を持っている読者には，どこから読んでも楽しく飽きることのない凝縮されたエッセイ集としての価値があろう．最近の重要な話題である確率的レーブナー方程式 SLE についての日本語の入門書としての意義は大変大きい．今なお色あせないホフスタッターの蝶と，最近大きな進歩を遂げている交通流（交通渋滞）における厳密可解模型である非対称排除過程 ASEP が同じ章（第 8 章）で論じられているのは嬉しい．

白石　潤一（東京大学大学院数理科学研究科）

リレー連載

ネットワーク科学最前線

—世界の"つながり"を知る科学と思考—

第4回

複雑ネットワーク上のランダム・ウォーク

増田 直紀

1. ランダム・ウォーク

ランダム・ウォークは，ウォーカーがグラフ（ネットワーク）上の頂点から頂点へと動き回る確率過程である[4]．ギャンブルの解析にも用いられてきたように，長い歴史がある．各頂点を所持金の値としよう．1回の賭けに勝つと所持金が1増え，負けると1減る場合は，対応するランダム・ウォークの規則は図1のように表せよう．→についた数字はそのような事象（イベント）が起こる確率である．

グラフが与えられたとする．各枝を等確率でたどって隣の頂点に到達するランダム・ウォークは最も単純であり，単純ランダム・ウォークと呼ぶ．本稿では，離散時間の場合のみを考える．頂点 v の次数（持っている枝の数）を k とすると，ウォーカーが時刻 n で v にいるならば，時刻 $n+1$ では v に隣接する頂点のどれかに確率 $1/k$ で移動する．一方，図1の例は，この定義によると単純でないランダム・ウォークである．

各時刻でどの頂点や枝が通られたか，という意味では実現されるウォークは毎回異なる．そこで，同じ頂点から始まるランダム・ウォークを多数回走らせて，何らかの統計量を問う．例えば，時刻 n における，出発点 v_s からの距離の分布，それまでに訪れた頂点数の分布，再び v_s に戻ってくる確率 y_n，初めて v_s に戻る確率 x_n，あるいは初めて頂点 v_e $(\neq v_s)$ に達する確率などに興味が湧く．ギャンブルの例で，v_s をお金 c_s に対応する頂点，v_e をお金 0 に対応する頂点とする．すると，時刻 n で v_s から v_e に初めて到達する確率とは，所持金 c_s から始めて時刻 n で破産する確率となる．さらに，その確率を $n=1,2,\cdots$ に渡って足せば，初期資産 c_s から始めた賭けがいずれ破産に終わる確率となる．

x_n と y_n は密接に結びついている．v_s から出発して時刻 n で v_s に（初めてには関わらず）戻ってくるには，ある $n'\leq n$ に対して時刻 n' に初めて v_s に戻り，またそこからランダム・ウォークを始めて $n-n'$ 後に（初めてには関わらず）v_s に戻ってくることと同じである．よって，

$$y_n=\sum_{n'=1}^{n}x_{n'}y_{n-n'}+\delta_{n,0} \qquad (1)$$

が成り立つ．ただし，$\delta_{n,0}$ は $n=0$ のとき1で，

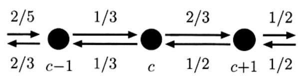


図1　ギャンブラーが行う1次元格子上のランダム・ウォーク．$c-1$, c, $c+1$ は所持金．

その他のときは 0 とする．式 (1) で $n=0$ とすると，$y_0=1$ となる．時刻 0 では，v_s から出発したウォーカーはもちろん v_s にいるので，これは自然である．さて，生成関数（母関数）を

$$X(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n, \qquad (2)$$

$$Y(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \qquad (3)$$

で定義する．$X(z)$ は $x_0, x_1, x_2, \cdots$ の値の情報をまとめて持っていて，$Y(z)$ も同様である．式 (1) より

$$Y(z) = X(z)Y(z) + 1 \qquad (4)$$

が成立する．

2. 再帰性

ウォーカーが出発点にどのくらい戻ってきやすいか，について考えてみよう．

$$\mathrm{Prob}\,(x_n < \infty) = 1 \qquad (5)$$

のとき，ランダム・ウォークは再帰的であると言う．再帰的ならば，ウォーカーはいつか出発点に戻ってくる．再帰的でないときは非再帰的または過渡的と言う．

式 (2) より，再帰的であることは $X(0)=1$ と同値である．このとき，式 (4) に $z=0$ を入れてみると，$Y(0)=\infty$ となる．これは雑な議論だが，再帰的であることは実際に $Y(0)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \infty$，つまり，無限回出発点に戻ってくることと同値である．x_n よりも y_n のほうが求めやすいことがあるので，この読み替えは有用だ．

d 次元超立方格子（通常の格子．$d=1$ なら図 1 のような形，$d=2$ なら正方格子）上の単純ランダム・ウォークでは，n が大きいとき

$$y_n \propto n^{-d/2} \qquad (6)$$

となる（$\propto$ は比例を表す）．$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ は $\alpha > 1$ のときにのみ収束するので，$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \infty$ ($d=1, 2$), $\sum_{n=0}^{\infty} y_n < \infty$ ($d \geq 3$) となる．よって，1, 2 次元格子では再帰的であり，3 次元以上では非再帰的である[4,5,13]．

次数が k である木の上の単純ランダム・ウォークでは，大きい n に対して

$$y_n \propto \left(\frac{4(k-1)}{k^2}\right)^n n^{-3/2} \qquad (7)$$

が知られている[13]．意味のある木は $k \geq 3$ であり，このとき $4(k-1)/k^2 < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n < \infty$ なので，非再帰的である．

3. ランダム・ウォークと複雑ネットワーク

ごく最近まで，ランダム・ウォークで仮定されるグラフは d 次元超立方格子，木，一般的なアーベル群など，ある程度単純なものに絞られていた．だからこそ，数学や物理の美しい結果が数多く出されてきた．ところが，近年明らかにされつつあり，本連載でも扱われているように，現実世界のネットワークは，複雑かつ秩序ある構造を持つ[7,8]．正方格子，木，ランダム・グラフなどの簡単なグラフでは大抵表せない．特に，ある頂点から他のある頂点に行くまでの距離（介する枝の数）が平均的に小さく，友達の友達はやはり自分の友達でありやすいこと（併せてスモールワールド性），次数分布がベキ則に従うこと（スケールフリー性）は，多くの実ネットワークに共通する．

このような複雑ネットワーク上のランダム・ウォークは，例えばサーチという応用と関連している[1,3]．サーチとは，ある頂点 v_s から出発して，与えられた目的地 v_e を目指すことである．各ウェブサイトを頂点，クリックでサイトからサイトへと飛び移れるハイパーリンクを枝とすると，WWW（ワールド・ワイド・ウェブ）は典型的なスケールフリーかつスモールワールド・ネットワークである．そこで，検索の問題は，基礎理論的にはスケールフリー・ネットワーク上のサーチ問題に置き替えられる（もちろん，実装のためには，様々な技術的要因も克服する必要がある）．今いるサイト v_s から目的のサイト v_e を効率的に探し当てるには

どうすればいいだろう．大きなネットワークの中に埋もれた情報を探す需要は，インターネットに限らずある．

v_s から v_e へ行く最短路がわかっているなら，その最短路が混みすぎていない限り，そこを通るのが最適である．しかし，最短路の情報は部分的（例えば，どちらの「方角」に目的地がある）にしか得られないことが多い．その場合は，ランダム性を取り込んで探索する．特に，最短路や隣の頂点の情報が全くない極端な場合は，ともかく隣の頂点に飛んでみるしかなく，単純ランダム・ウォークに対応する．この対応も手伝って，2000 年頃からネットワーク上のランダム・ウォークに関心が寄せられている．複雑ネットワークの研究全体も構造の研究からダイナミクスや機能の研究へと移行しつつあるが，この流れとも符合する．

格子や木は，通常限りなく遠くまで続いた無限グラフである．複雑ネットワーク上のダイナミクス解析は，頂点数が有限の有限グラフで考える場合と無限グラフで考える場合がある．現実のネットワークは有限なので，有限グラフが現実に忠実だが，多くの統計物理や数学の理論は無限グラフの極限が前提とされている．

優劣をつけずとも，問題意識や手法が異なってくる[5]．有限の複雑ネットワークでは，時間が十分たったときにウォーカーが頂点 v_i に存在する確率（定常密度）は，v_i の頂点の次数 k_i に比例する[11]．ランダム・ウォーカーはハブ（次数の大きい頂点）に居やすい．また，x_n などの初回到達時刻の統計についても，近似を少し入れることによって解析的に求まる[11,14]．一方，どのような有限グラフでも，グラフが複数の部分に分断している場合を除いて自明に再帰的である．よって，再帰性の問題設定は，無限グラフに対して意味をなす．逆に，有限グラフで存在した定常密度は，無限グラフでは通常存在しない．ウォーカーは，程度こそ異なり得るとはいえ，時間が大きくなると無限彼方に行ってしまう．観測地点 v を固定すると，時間が十分たった後には v にウォーカーがいる確率は 0 となる．つまり，ウォーカーは v を「通過」してもっと遠くに行ってしまう．

本稿では，無限に広がった複雑ネットワークにおける，離散時間単純ランダム・ウォークの x_n の解析を紹介する[9]．

4. ゴルトン・ワトソン木上のランダム・ウォーク

次数が頂点ごとに異なるネットワーク，その中でも特にスケールフリー・ネットワークのモデルは多種類ある．ここでは，解析的な式を導くために，図 2 のゴルトン・ワトソン木（一般化ランダム・グラフと呼ぶこともある）を用いる．頂点次数 k が頂点ごとに独立に，前もって用意した次数分布 $\{p_k\}$ に従って決められる．p_k は次数が k となる確率であり，$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ が成り立っている．実際にネットワークを生成するには，まず点 O の次数を $\{p_k\}$ に従って決める．図 2 ではたまたま次数は 5 となった．次に，O の 5 つの隣接点のそれぞれについて，$\{p_k\}$ に従って次数を決める．次は，5 点の新しい隣接点のそれぞれ（例えば A）について同じことを行い，この操作を繰り返す．このグラフは，無限に広がりループを持たない．ループがないので，ランダム・ウォークに限らず諸現象の解析を比較的楽にできる．ただし，実際のネットワークにはループが多くある（クラスター性）ので，その点では現実性を損なう．

注意として，有限グラフでは，枝をたどった先には次数の大きい頂点（ハブ）がついて居やすい．例えば図 3 のネットワークを考える．枝の配線は指定されていないが，ともかく何らかの形で結び

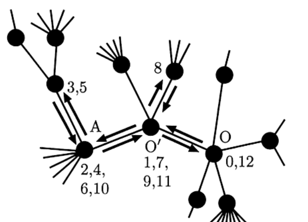


図 2　ゴルトン・ワトソン木上のランダム・ウォーク．

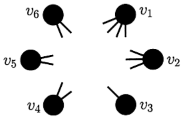


図3　枝をたどった先にはハブが居やすい．

ついているとする．ウォーカーが時刻 n に v_6 にいるとしよう．時刻 $n+1$ では，ウォーカーは $v_1, \cdots, v_5$ のどれかに移動するが，各頂点に確率 $1/5$ で行くわけではない．ウォーカーは枝の上を歩くので，$v_1, \cdots, v_5$ のそれぞれが v_6 と結びついている確率は，$v_1, \cdots, v_5$ の枝数（次数）に比例する．v_1 に行く確率は $4/(4+3+1+2+2) = 1/3$，v_3 に行く確率は $1/12$ などとなる．これは，先で説明した，有限グラフでは定常密度が頂点次数に比例すること[11] の根拠でもある．ウイルスの伝播モデルでは，この効果のために，スケールフリーなどの次数が一様でないネットワークで極端に伝播が起こりやすい．こういった効果を取り入れるには，p_k を $kp_k/\sum_{k'} k'p_{k'}$ で置き換える必要があるが，ここでは考慮しない．

5. 主要な結果

グラフ上のある 1 点 O を起点とするランダム・ウォークを考える．グラフにループがないので，ウォーカーが O に初めて帰還するのは，必ず偶数時間後である．すなわち，自然数 n に対して $x_{2n-1} = 0$ である．q_n を，時刻 $2n$ でウォーカーが初めて O に帰る確率とする．$q_n = x_{2n}$ である．$\{q_n\}$ の生成関数を $Q(z)$ とする．すなわち，

$$Q(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n, \tag{8}$$

$q_0 = 0$ に注意する．$Q(z)$ は $X(z)$ とほぼ同じ意味を持つ．ゴルトン・ワトソン木上のランダム・ウォークは非再帰的と知られているので[6]，$Q(z) < 1$ である．

ランダム・ウォーカーが O から出発して O に初めて帰還するまでの時間について，近似公式を導きたい．そのためには，再帰的な関係に注目する．図 2 で考えよう．O からスタートして，時刻 $2n$ で初めて O に戻るとする．図 2 では $n = 6$ である．時刻 1 でウォーカーが O に隣接する頂点 O′ に動くとする．O′ の次数は $\{p_k\}$ に従って分布している．時刻 $2n$ $(= 12)$ で O に戻ってくるには，時刻 $2n-1$ $(= 11)$ で O′ にいないとならない．そうなっていれば，最後のステップで確率 $1/k$ で O′ から O へ戻れる．時刻 1 と時刻 $n-1$ の間（$2n-2$ ステップだけある）は，ウォーカーは O には訪れずに歩き続ける．O を訪れないということは，O′ を根とする（O と反対側の）部分木の中を歩いていなければならない．O′ から一歩動くときに，O に戻らずにこのような部分木に入る確率は $(k-1)/k$ である．この場合，ウォーカーはいずれ O′ に戻ってきて，1 回の「部分木ウォーク」が終わる．O′ に戻ってきたときに時刻が $2n-1$ より小さかったら，再び「部分木ウォーク」を始める．

O′ を起点とする「部分木ウォーク」の回数を a とする．図 2 の場合は，$a = 3$ である．各「部分木ウォーク」の長さはやはり偶数なので，$2n_i$ $(1 \le i \le a)$ とする（図 2 では $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 1$）．$2n_i$ の和は $2n-2$ $(= 10)$ となる．

ここで，再帰性を利用して，各部分木ウォークの長さ（O′ から出発して O′ に戻る）の分布は，元のランダム・ウォークが O から出発して O に初めて戻るまでの時間の分布に等しいと考える．実際には，a 個の部分木は独立に選ばれないが（O′ の 1 つの隣接点が，2 つ以上の部分木ウォークの入口として選ばれる場合），これを独立と思うことが近似である．実際には，ネットワークの平均次数が小さすぎない限り，誤差は小さい．

今まで述べたことを式で書くと，以下のようになる．

$$q_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{n_i} \frac{k-1}{k} q_{n_1} \frac{k-1}{k} q_{n_2} \cdots \frac{k-1}{k} q_{n_a} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^a \sum_{n_i} \prod_{a'=1}^{a} q_{n_{a'}}. \quad (9)$$

ただし，n_i についての和は，$\sum_{i=1}^{a} n_i = n-1, n_i \geq 0$ となるような $n_1, n_2, \cdots, n_a$ についてのみとる．式 (9) より

$$\begin{aligned} &Q(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^a \sum_{n_i} \prod_{a'=1}^{a} q_{n_{a'}}\right\} z^n \\ &= z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^a \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_i} \prod_{a'=1}^{a} q_{n_{a'}} z^{n_{a'}} \\ &= z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^a Q(z)^a \\ &= z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k-(k-1)Q(z)} \end{aligned} \quad (10)$$

とわかる．$Q(1) = 1$ は式 (10) を満たす．$Q(1) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$ は，再帰的であることの定義であるが，ゴルトン・ワトソン木上のランダム・ウォークは非再帰的（$Q(1) < 1$）である．

$Q(1) < 1$ となる解を探すために式 (10) の右辺を展開すると

$$\begin{aligned} Q(z) &= z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k} Q(z)\right)^n \\ &= \frac{zM\left[Q(z)\right]}{Q(z)} \end{aligned} \quad (11)$$

を得る．ここで，

$$M(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} m_n z^n, \quad (12)$$

$$m_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{n-1}}{k^n} p_k \quad (13)$$

はネットワーク構造にのみで決まる量である．$Q(z)$ の具体的な表式がほしいが，式 (11) の右辺は $Q(z)$ の多項式であり，簡単には行かない．ここで，便利な公式を用いる．

ラグランジュの反転公式[2]　$z = w/f(w)$ と置き，$w/f(w)$ は $w = 0$ の近傍で解析的とする．もし，もう一つの関数 g が無限回微分可能ならば，

$$\begin{aligned} &g\left(w(z)\right) \\ &= g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left[g'(u)f(u)^n\right]\right]_{u=0}. \end{aligned} \quad (14)$$

この公式は，w の関数として z の形が与えられたとき，z の関数として w や w の関数 $g(w)$ を表す方法を与える．つまり逆関数の公式のようなものである．ラグランジュの反転公式は，Bak–Sneppen モデルの複雑ネットワーク版の解析にも有用である[10]．ここでは，$w(z) = Q(z)$, $f(w) = M(w)/w$ とすると式 (11) が再現される．さらに $g(w) = w$ として式 (14) を用いると

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left(\frac{M(u)}{u}\right)^n\right]_{u=0} \quad (15)$$

となる．式 (15) の右辺の $M(u)^n$ は

$$\begin{aligned} M(u)^n &= (m_1 u + m_2 u^2 + \cdots)^n \\ &= \sum_{n'=n}^{\infty} u^{n'} \sum_{\lambda \vdash n'}' \frac{n!}{\prod_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l)!} \prod_{l=1}^{\infty} m_l^{i_\lambda(l)} \end{aligned} \quad (16)$$

と表せる．$\lambda \vdash n'$ は n' の自然数への分割である．すなわち，n' を自然数の和として表す方法である．3 の自然数への分割は，3 そのもの，$1+2$ と表す方法，$1+1+1$ と表す方法の 3 通りがある．一般論として，分割 λ は，$\lambda = (1^{i_\lambda(1)} 2^{i_\lambda(2)} \cdots)$ と表される．1 が λ に $i_\lambda(1)$ 個含まれ，2 が $i_\lambda(2)$ 個含まれ … という意味である．この表記を用いると 3 そのものは (3)，$1+2$ は (12)，$1+1+1$ は (1^3) となる．また，

$$\begin{aligned} \{\lambda \mid \lambda \vdash 5\} = \{&(1^5), (1^3 2), (1^2 3), (12^2), \\ &(14), (23), (5)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{\lambda \mid \lambda \vdash 7\} = \{&(1^7), (1^5 2), (1^4 3), (1^3 2^2), (1^3 4), \\ &(1^2 23), (1^2 5), (12^3), (124), (13^2), \\ &(16), (2^2 3), (25), (34), (7)\} \end{aligned} \quad (18)$$

となる．分割の定義より $\{i_\lambda(1), i_\lambda(2), \cdots\}$ ($\lambda \vdash n'$) は $\sum_{l=1}^{\infty} l\ i_\lambda(l) = \sum_{l=1}^{n'} l\ i_\lambda(l) = n'$ を満

たす．

式 (16) の $\sum'$ は，n' の分割 λ のうち $\sum_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l) = n$ となるもの，すなわち n パーツあるものだけについての和を表す．3 の分割 (3) は 1 パーツ，$(12) = 1+2$ は 2 パーツ，$(1^3) = 1+1+1$ は 3 パーツ，と数える．さて，式 (15) を見ると，$M(u)^n/u^n$ を $n-1$ 回微分して $u=0$ を代入するので，$M(u)^n/u^n$ の u^{n-1} に比例する項，すなわち，$M(u)^n$ の u^{2n-1} に比例する項のみが生き残る．よって，$n' = 2n-1$ だけに関心がある．つまり $2n-1$ の分割で，n パーツあるものだけについて和をとればよい．$n=3$ とすると，5 の分割 $(\lambda \mid \lambda \vdash 5)$ のうち 3 パーツ $(\sum_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l) = 3)$ のものが和の対象となる．式 (17) より，$(1^2 3)$ と (12^2) が該当する．$n=4$ とすると，7 の分割 $(\lambda \mid \lambda \vdash 7)$ のうち 4 パーツ $(\sum_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l) = 4)$ のものとなる．式 (18) より，$(1^3 4)$, $(1^2 23)$, (12^3) が該当する．式 (16) の $n' = 2n-1$ の項だけ取り出して式 (15) に代入すると，

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}(n-1)! \cdot \sum_{\lambda \vdash 2n-1}' \frac{n!}{\prod_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l)!} \prod_{l=1}^{\infty} m_l^{i_\lambda(l)} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\lambda \vdash 2n-1}' c_\lambda^{(n)} \prod_{l=1}^{\infty} m_l^{i_\lambda(l)}, \quad (19)$$

$$c_\lambda^{(n)} = \frac{(n-1)!}{\prod_{l=1}^{\infty} i_\lambda(l)!}. \quad (20)$$

生成関数の定義（式 (8)）と比べると，式 (19) の z^n の比例定数が q_n であるとわかる．

6. 例

(A) ケーリー・ツリー（通常の木）は，各頂点の次数が d であるゴルトン・ワトソン木である．$p_k = \delta_{k,d}$ を式 (10) に代入すると，

$$Q(z) = \frac{1}{d-(d-1)Q(z)} \quad (21)$$

となる．$Q(1) = 1$ でない解は，

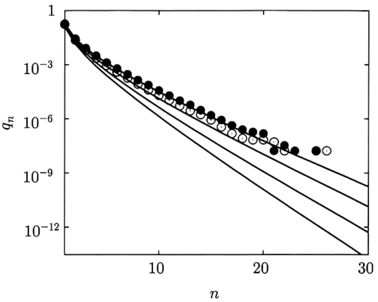


図 4　q_n．○：ランダム・グラフ（平均次数 $\lambda = 7$）の数値計算，●：スケールフリー・ネットワーク（平均次数 7.09）の数値計算．実線は理論による予測（下から順に次数 7 のケーリー・ツリー，次数 8 のケーリー・ツリー，式 (24)（$\lambda = 7$）に従うゴルトン・ワトソン木，式 (26)（$m = 4$）に従うゴルトン・ワトソン木）．

$$Q(z) = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4(d-1)z}}{2(d-1)}. \quad (22)$$

カタラン数 $D_n \equiv {}_{2n}C_n/(n+1)$ の生成関数 $S(z) = (1-\sqrt{1-4z})/2z$ と比べると

$$q_n = \frac{(d-1)^{n-1} D_{n-1}}{d^{2n-1}} \quad (23)$$

となり，既存の結果[13)] と一致する．ケーリー・ツリーの q_n の例を図 4 に示す（1 番下の実線が $d=7$，下から 2 番目の実線が $d=8$）．

(B) ランダム・グラフでは，次数分布は

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (24)$$

のポアソン分布に従う．この場合は式 (19) を数値計算して，q_n を求める．次数が $\lambda = 7$ のポアソン分布に従うゴルトン・ワトソン木の q_n は，図 4 の上から 2 番目の実線となる．直接ランダム・ウォークを数値計算して求めた q_n (○) と $n = 10$ くらいまでよく一致する．

式 (23) によると，q_n は n について大体指数的に減る．図 4 を見ると，ランダム・グラフでも n が増えると q_n は指数的に（急速に）小さくなる．

直接ランダム・ウォークを数値計算して q_n を求めようとすると，

$$q_n = \frac{(\text{時刻 } n \text{ で原点に戻るウォークの数})}{(\text{走らせたウォークの総数})} \tag{25}$$

となる．式 (25) の分子がある程度大きくないと q_n をうまく見積れないので，走らせるべきウォークの総数は $O(1/q_n)$ となり，指数的に増える．よって，ある程度大きい n について q_n を直接数値計算で求めるのは無理がある．図 4 で $n = 25$ くらいまでしか直接数値計算していないのはそのためである．$n \geq 15$ では，式 (25) の分子が小さい $(= O(1))$ ので誤差が大きい．式 (19) を使うと，大きな n までの q_n が小さい近似誤差で求まる．

(C) スケールフリー型の次数分布として

$$p_k = \begin{cases} \mathcal{N}k^{-3}, & (k \geq m), \\ 0, & (k < m) \end{cases} \tag{26}$$

を考える（$\mathcal{N}$ は $\sum_{k=m}^{\infty} p_k = 1$ を実現するための正規化定数）．次数分布が式 (26) となるゴルトン・ワトソン木について，式 (19) から求めた q_n は図 4 の一番上の実線となる．直接数値計算 (●) とよく一致している．スケールフリー・ネットワークの q_n も，大体指数的に減衰する．

なお，図 4 では，平均次数を同じくらい $(\cong 7)$ にして，3 種類のネットワークの q_n が比べられている．減衰の仕方は，同じ平均次数のケーリー・ツリーよりもランダム・グラフのほうが遅く，スケールフリーではさらに遅い．次数分布の非一様性が大きいほど出発点に帰ってきやすいことが示唆される．これは，非一様性が大きいほどウォーカーが遠くまで行きにくい，という数学的な結果[6]と符合する．

7. おわりに

本稿ではネットワーク上のランダム・ウォークについて紹介した．格子などの古典的なネットワークの場合には，単純ランダム・ウォーク，その他のランダム・ウォークについて豊富な結果が蓄積されている．複雑ネットワークでは，グラフを難しくした分，得られる結果は少ない．本稿の話も，ループがない木型のネットワークに限定されている．しかしながら，複雑ネットワーク上のランダム・ウォークの解析は，WWW の例で見たように実用領域からの需要がある．また，ここで紹介した研究や他の研究[1, 11]が明らかにしたように，次数分布の形は，ランダム・ウォークの統計に大きく影響する．ネットワーク上の単純でないランダム・ウォーク，より精密な解析，応用の模索などについても研究が進みつつあり，今後の課題であろう．

参考文献

1) L.A. Adamic, R.M. Lukose, A.R. Puniyani and B.A. Huberman, Search in power-law networks. *Phys. Rev. E* **64**, 046135 (2001).
2) G.R. Grimmett and D.R. Stirzaker, *Probability and Random Processes. 2nd ed.* Oxford University Press, Oxford (1992).
3) J.M. Kleinberg, Navigation in a small world. *Nature* **406**, 845 (2000).
4) 今野紀雄,『図解雑学　確率モデル』ナツメ社 (2000).
5) 熊谷隆,『確率論』共立出版 (2003).（特に，第 3 章）.
6) R. Lyons, R. Pemantle and Y. Peres, Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **15**, 593–619 (1995).
7) 増田直紀，今野紀雄，『複雑ネットワークの科学』産業図書 (2005).
8) 増田直紀，今野紀雄，『「複雑ネットワーク」とは何か』講談社ブルーバックス (2006).
9) N. Masuda and N. Konno, Return times of random walk on generalized random graphs. *Phys. Rev. E* **69**, 066113 (2004).
10) N. Masuda, K.-I. Goh and B. Kahng, Extremal dynamics on complex networks: Analytic solutions. *Phys. Rev. E* **72**, 066106 (2005).
11) J.D. Noh and H. Rieger, Random walks on complex networks. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 118701 (2004).
12) P.E. Parris and V.M. Kenkre, Traversal times for random walks on small-world networks. *Phys. Rev. E* **72**, 056119 (2005).
13) 志賀徳造,『ルベーグ積分から確率論』共立出版 (2000).（特に，第 6 章）.
14) V. Sood, S. Redner and D. ben-Avraham, First passage properties of the Erdös-Renyi random graph. *J. Phys. A* **38**, 109–123 (2005).

（ますだ・なおき，東京大学大学院情報理工学系研究科）

ゲーム理論講義

第6回

展開形ゲーム

船木 由喜彦

今回は，プレイヤーの選択が逐次的な場合の問題分析方法を紹介する．これは展開形ゲームと呼ばれ，樹形図を用いたゲームの表現方法で，特にプレイヤーの持つ情報の構造を表現するのに適している．そのため，多くの経済学の問題などに適用されている．

6.1 選択が逐次的なゲーム

第1回の商店主ゲームを思い出していただきたい．そのゲームで，もし，商店主の選択が逐次的であれば，どのように分析すればよいであろうか．ここでは先手の商店主をプレイヤーA, 後手の商店主をプレイヤーBと呼ぶことにしよう．また，簡単のためAの取り得る選択肢は110円か150円の2通り，Bの取り得る選択肢は110円，150円，200円の3通りであるとしよう．

これを表現するのには図6.1のような木（横向き）の形の図（樹形図）を利用するのが便利である．プレイヤーAが初めに選択肢110円，150円のどちらかを決定し，それを知ってプレイヤーBが選択肢110円，150円，200円のいずれかを決定することをこの図は示している．それぞれの選択の結果，生ずる利得が木の最後に利得ベクトルとして，(9,9), (18,0), (18,0), (0,18), (8,8), (18,0)と書かれている．

この木を**ゲームの木**と呼び，最初の意志決定が行われる点を木の**始点**と呼ぶ．始点を含めて，木の分岐点ではいずれかのプレイヤーが選択を行うので，これらの分岐点はそれぞれ1人のプレイヤーに対応している．商店主ゲームの例だと分岐点 A ではAが選択をし，B_1, B_2 ではBが選択をする．ここで，B_1 はAが110円を選択したとき，B_2 はAが150円を選択したときの状況に対応している．

ゲームの木は最後には終点に至って終了する．この終点には各プレイヤーの

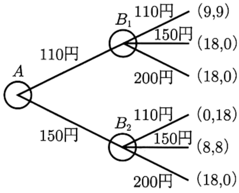


図 6.1　逐次選択の商店主ゲーム．

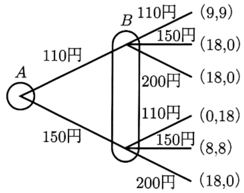


図 6.2　同時選択の商店主ゲーム．

得る利得を表す利得ベクトルが割り当てられている．例えば，A が 110 円を選択し，B が 110 円を選択すると利得ベクトル (9,9) に至り，両プレイヤーは 9 を獲得する．A が 110 円を選択し，B が 150 円を選択すると利得ベクトル (18,0) に至り，A が 18，B がゼロを獲得する．(以下同様)

一方，同時選択のゲームのように，意志決定をする時点で他のプレイヤーの意志決定結果を知らずに選択をしなければならないこともある．このような状況は情報集合によって表現することができる．図 6.2 を見ていただきたい．B の 2 つの分岐点は楕円で囲まれている．これは B にとってこの 2 つの分岐点を識別できないこと，すなわち，A が 110 円を選択したか 150 円を選択したかそれを識別できないことを示している．その条件の下で B は選択をしなければならない．すなわち，この意味で，これは同時選択のゲームと同じである．

6.2 展開形ゲームの表現

前節のようなゲームの表現を，より一般的に定義しよう．このゲームは**展開形ゲーム**と呼ばれる．図 6.3 を見ていただきたい．展開形ゲームはプレイヤーの可能な行動選択の系列を樹形図の形で表現するゲームの表現形式で，木の分岐点でプレイヤーは，枝すなわち選択肢を選択する．始点の選択肢から始まり，終点（**頂点**と呼ぶ）に達してゲームのプレイは終了する．一般的に，展開形ゲーム Γ は次の 4 つの要素 (K, P, U, h) で表される．ここで，K はゲームの木，P はプレイヤー分割，U は情報構造，h は利得関数を表している．

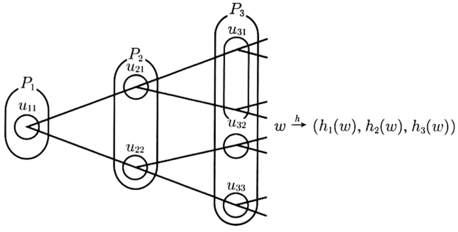


図 6.3　一般的な 3 人展開形ゲームの例．

ゲームの木 K は，分岐点と枝の集合として表されるが，分岐点はそこで，プレイヤーが選択をしなければならないので**手番**と呼ばれる．手番において選ばれる１つ１つの選択肢が木の枝で表現されている．なお，始点から頂点に至る経路（**プレイ**）はただ１通りだけである．すなわち，分岐した枝がその後，同一の手番や頂点に到達したりしてループが生ずることはない．

各手番においては，ただ１人のプレイヤーが選択をするが，そのプレイヤーを規定するのが**プレイヤー分割** $P = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$ である．すなわち，手番の集合は各プレイヤーの手番の集合 P_j に分割される．したがって，

$$P_1 \cup \cdots \cup P_n = M, \quad P_k \cap P_j = \emptyset \quad (j \neq k)$$

が成り立つ．ただし，M はゲームの木におけるすべての手番の集合である．

情報構造 $U = [U_1, U_2, \cdots, U_n]$ は，プレイヤーが選択肢を決定する際に得ることのできる情報を表している．ここで，プレイヤー i の**情報集合** $u_{ik} \in U_i$ は i の手番の部分集合であり，その手番の選択肢の数が同じであるという条件を満たさなければならない．プレイヤー i は自分が選択を決定する際に，手番の属する情報集合はわかるが，その情報集合内のどの手番が実際のプレイ上の手番であるかはわからない．各 U_i に属する情報集合は P_i の分割になっている．すなわち

$$\bigcup_{u_{ik} \in U_i} u_{ik} = P_i, \quad u_{ik} \cap u_{il} = \emptyset \quad (k \neq l)$$

が成り立つ．このため情報構造は**情報分割**と呼ばれることもある．なお，すべての情報集合がただ１つの手番からなるとき，そのゲームを**完全情報ゲーム**と呼ぶ．

各頂点 w に各プレイヤーの得る利得のベクトル $(h_1(w), h_2(w), \cdots, h_n(w))$ を対応させる関数 $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ を**利得関数**と呼ぶ．１つのプレイに対し，１つの頂点が対応し，全員の利得が確定する．

6.3 展開形ゲームにおける戦略とサブゲーム完全均衡

逐次的に意志決定が行われる展開形ゲームにおいて，１つ１つの情報集合で選択される選択肢を**局所純戦略**と呼ぶ．プレイヤーは情報集合の中のどの手番がプレイ上の手番であるか確認できず，そのため，局所純戦略はその情報集合において選択肢を対応させるものである．一方，プレイヤーはゲームを開始する前に全体の行動計画を立てるかもしれない．それを（展開形ゲームの）**純戦略**と呼ぶ．すなわち，純戦略はプレイヤーが，各情報集合においてどのような選択肢を取るかを計画した行動スケジュールであり，それはすべての局所純戦略を集めたものである．戦略形ゲームのときと同様に，プレイヤーはこの純戦略に確率を与えるかもしれない．このような純戦略上の確率分布を（展開形ゲームの）**混合戦略**と呼ぶ．各プレイヤーが純戦略あるいは混合戦略を選択すると，

各プレイの生ずる確率が定まり，各頂点に到達する確率が定まり，頂点に対応する利得を元に，各プレイヤーの期待利得を計算することができる．このようにして展開形ゲームからそれに対応する戦略形ゲームを求めたとき，その戦略形ゲームのナッシュ均衡を展開形ゲームの（**混合戦略**）**ナッシュ均衡**と言う．

商店主の例において A の局所純戦略は 110 円および 150 円である．B の局所純戦略は B_1 において 110 円，150 円，200 円の 3 つ，B_2 においても 110 円，150 円，200 円の 3 つである．一方，A の純戦略は 110 円および 150 円で同じであるが，B の純戦略は，

$$s_1 = (B_1 : 110\text{円},\ B_2 : 110\text{円}),\quad s_2 = (B_1 : 110\text{円},\ B_2 : 150\text{円}),$$
$$s_3 = (B_1 : 110\text{円},\ B_2 : 200\text{円}),\quad s_4 = (B_1 : 150\text{円},\ B_2 : 110\text{円}),$$
$$s_5 = (B_1 : 150\text{円},\ B_2 : 150\text{円}),\quad s_6 = (B_1 : 150\text{円},\ B_2 : 200\text{円}),$$
$$s_7 = (B_1 : 200\text{円},\ B_2 : 110\text{円}),\quad s_8 = (B_1 : 200\text{円},\ B_2 : 150\text{円}),$$
$$s_9 = (B_1 : 200\text{円},\ B_2 : 200\text{円})$$

の 9 通りあることに注意していただきたい．ここで，コロン (:) の前は情報集合を表し，後ろはそこにおける選択肢を表している．

一方，各情報集合において，プレイヤーは局所純戦略ではなくそれらの選択肢に付与する確率を選ぶかもしれない．その確率分布を**局所戦略**と呼ぶ．各情報集合において，どのような局所戦略を取るかを計画した行動スケジュールを**行動戦略**と呼ぶ．行動戦略の中で，各局所戦略がすべて局所純戦略であればその行動戦略は展開形ゲームの純戦略となる．各プレイヤーが行動戦略を決定すると各プレイの生ずる確率が定まり，各頂点に到達する確率，さらに，それと各頂点に対応する利得ベクトルから，各プレイヤーの期待利得を計算することができる．各プレイヤーが行動戦略を取ると考え，そのとき，この行動戦略と期待利得の関係から求めたナッシュ均衡を（展開形ゲームの）**行動戦略ナッシュ均衡**と言う．

例えば，商店主ゲームの例において，プレイヤー B が純戦略 $s_1 \sim s_9$ をそれぞれ 1/9 の確率で取る戦略は混合戦略であるが B_1 において，110 円を 1/3，150 円を 1/3，200 円を 1/3 の確率で取り B_2 において，110 円を 1/3，150 円を 1/3，200 円を 1/3 の確率で取るような行動計画は行動戦略である．この例において，プレイヤー A がどのような戦略（混合戦略，行動戦略）を取ろうとも，この混合戦略と行動戦略により，到達する各頂点の確率分布は一致する．すなわち，これらは同等な戦略と考えることができる．標準的な条件の下で，このような意味で行動戦略と混合戦略は同等である．詳細は文献 2) をご覧いただきたい．

展開形ゲームにおいては，戦略形ゲームと異なったタイプの解概念を考えることができる．その代表的なものがサブゲーム完全均衡である．なお，この概念は多くの経済学的な例に応用されている．

展開形ゲームにおいて，分岐点と枝の部分集合が木になっており，それ自身

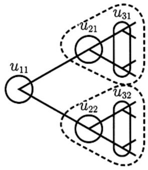


図 6.4　サブゲームの例.

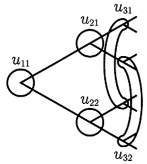


図 6.5　サブゲームの存在しない例.

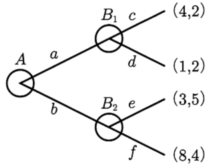


図 6.6　タイのある完全情報ゲームの例.

が展開形ゲームの構造を持つとき**サブゲーム**あるいは**部分ゲーム**と呼ぶ.（元のゲーム自身もサブゲームと考える.）例えば図 6.4 のゲームで点線に囲まれた部分はすべてサブゲームである．一方図 6.5 のゲームでは情報集合を切り離すことができないので，元のゲーム自身以外にサブゲームはない.

すべての部分ゲームに純戦略あるいは行動戦略のナッシュ均衡を導くような，元の展開形ゲームの純戦略あるいは行動戦略ナッシュ均衡を**サブゲーム完全均衡**と呼ぶ．サブゲーム完全均衡は**部分ゲーム完全均衡**と呼ばれることもある.

商店主の例において手番 B_1 から始まるゲームはサブゲームである．また手番 B_2 から始まるゲームもサブゲームである．これらのサブゲームのナッシュ均衡は B_1 では B が 110 円を取ることで，B_2 でも B が 110 円を取ることである．これらの局所純戦略を前提にすると全体のゲームでナッシュ均衡となるためにプレイヤー A が手番 A で取るべき戦略は 110 円となる.

この方法は，同時にサブゲーム完全均衡を求める方法を与えている．すなわち，最も頂点に近いサブゲームのナッシュ均衡を求め，そのサブゲームの始点をナッシュ均衡利得の組と置き換える．置き換えたゲームにおいて，最も頂点に近いサブゲームのナッシュ均衡を求め，そのサブゲームの始点をナッシュ均衡利得の組と置き換える．このようなプロセスを続けた結果，得られたのが上記のナッシュ均衡であり，サブゲーム完全均衡になっている．展開形ゲームにおいてこのようにしてサブゲーム完全均衡を求めるプロセスは**後向き帰納法**，あるいは**逆向き帰納法**と呼ばれている．完全情報ゲームにおいては，この方法で必ずサブゲーム完全均衡を求めることができる．なお，タイ（どちらの局所純戦略を取っても利得が同じ）の場合はどちらの選択肢を選んでもサブゲーム完全均衡を得ることができる．例えば図 6.6 のタイのある完全情報ゲームでは，B_1 では c, d 2 つがナッシュ均衡であり，B_2 では e がナッシュ均衡である．B_1 の c，B_2 の e に対しては A が a をとることが最適である．B_1 の d，B_2 の e に対しては A が b をとることが最適である．したがって，このゲームでは，

$$A : a, B_1 : c, B_2 : e, \quad A : b, B_1 : d, B_2 : e$$

の 2 つのサブゲーム完全均衡がある．なお，サブゲーム完全均衡は純戦略と行動戦略の概念であることに注意していただきたい．また，同時選択の商店主ゲームのようにサブゲームが元のゲーム自身しかない場合にはサブゲーム完全均衡

とナッシュ均衡の概念は一致する．

6.4 戦略形ゲームへの変換

前節で示したように，展開形ゲームにおいてその純戦略を求め，それに対応する利得を考えると展開形ゲームからそれに対応する戦略形ゲームを求めることができる．これを展開形ゲームの戦略形ゲームへの変換と呼ぶ．

例えば逐次選択の商店主ゲームを戦略形ゲームに変換すると表 6.1 のようになる．

表 6.1　逐次選択の 2 人商店主ゲームの戦略形表現．

A\B	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
110 円	$(9,9)$	$(9,9)$	$(9,9)$	$(18,0)$	$(18,0)$	$(18,0)$	$(18,0)$	$(18,0)$	$(18,0)$
150 円	$(0,18)$	$(8,8)$	$(18,0)$	$(0,18)$	$(8,8)$	$(18,0)$	$(0,18)$	$(8,8)$	$(18,0)$

このように変換すると，容易にナッシュ均衡を計算することができる．純戦略ナッシュ均衡は (110 円, s_1) と (150 円, s_2) の 2 つであり，前者はサブゲーム完全均衡であるが，後者はそうではない．

最後に，展開形ゲームについてその詳細を紹介している参考文献として文献 2) をあげておく．さらに，関連する問題の演習については文献 1) を参照していただきたい．

参考文献

1)　船木由喜彦『演習ゲーム理論』新世社 (2004).
2)　岡田　章『ゲーム理論』有斐閣 (1996).

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

第6回 a primer of Probability 使うための確率論入門

見分けがつかない粒子たち

渡辺 浩

今回は識別できない粒子系を調べ，前回扱った識別できる粒子系との大きな違いに注目します．

Theme 凝縮

$N = 6 \times 10^{23}$ 個の粒子を 2 つの箱 A, B に無作為に入れる．すべての粒子が A に入る確率は，粒子が識別できる場合は 2^{-N} という途方もなく小さい値であるが，粒子が識別できない場合は $\frac{1}{N+1}$ となり，比較的大きい値を取る．比喩的に言えば，識別できない粒子たちは，一カ所に集まることへの'統計的抵抗力'が弱いのである．そのため，識別できない粒子を様々なエネルギーの'箱'に分けて入れようとすると，おびただしい数の粒子がエネルギーの最も小さい箱に集まってしまうことがある．これを「凝縮」と言う．

6.1 一般化された箱入れ問題

n 個の**識別不可能**な粒子を r 個の箱 $B_1, B_2, \cdots, B_r$ に入れる．ただし，箱 B_k $(k = 1, 2, \cdots, r)$ に入る粒子の数がそれぞれ n_k $(k = 1, 2, \cdots, r)$ である確率は，識別不可能性を考慮して

$$p(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right) \tag{6.1}$$

であるとする．ここで $n_1, n_2, \cdots, n_r$ は

$$n_k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.2}$$

$$\sum_{k=1}^{r} n_k = n \tag{6.3}$$

を満たし，箱の‘固有エネルギー’ $e_1, e_2, \cdots, e_r$ は 0 または正の定数であるとする．また，Z は全確率を 1 にするための規格化定数

$$Z = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right) \tag{6.4}$$

であり，(6.4) の右辺の和は，(6.2), (6.3) を満たす $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ の全体にわたる．特に，$e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$ とすれば，前回 (5.7) で定義したモデルと一致する．

(6.1)–(6.4) で定義されるモデルを，前回考察した‘粒子数の浮動化’を用いて調べよう．まず μ を実数の定数として，(6.1), (6.4) をそれぞれ次式で置き換える．

$$p(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{1}{Z(\mu)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k (e_k + \mu)\right), \tag{6.5}$$

$$Z(\mu) = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k (e_k + \mu)\right). \tag{6.6}$$

束縛条件 (6.3) の下では，(6.1) と (6.5) は同じ確率を定める．ここですべての k に対して $e_k + \mu > 0$ であるとすると（例えば $\mu > 0$ のとき），条件 (6.3) を外したモデル

$$\tilde{p}(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{1}{\tilde{Z}(\mu)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k (e_k + \mu)\right), \quad (n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r, \tag{6.7}$$

$$\tilde{Z}(\mu) = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k (e_k + \mu)\right) \tag{6.8}$$

を考えることができる．ただし $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ である．実際，(6.8) の右辺の和は各 n_k について独立に取ることができて，

$$\tilde{Z}(\mu) = \prod_{k=1}^{r} \sum_{n_k=0}^{\infty} \exp\left(-n_k(e_k + \mu)\right) = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - \exp\left(-(e_k + \mu)\right)} \tag{6.9}$$

となる．同様にして，箱 B_j に入る粒子の数 n_j の確率母関数は

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r} x^{n_j} \tilde{p}(n_1, n_2, \cdots, n_r) \\ &= \frac{1}{\tilde{Z}(\mu)} \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r} x^{n_j} \exp\left(-n_j(e_j + \mu)\right) \prod_{k \neq j} \exp\left(-n_k(e_k + \mu)\right) \\ &= \frac{1 - \exp\left(-(e_j + \mu)\right)}{1 - x \exp\left(-(e_j + \mu)\right)} \end{aligned} \tag{6.10}$$

となる[傍注1]．よって，前回の定理 5.1 を用いると，n_j の期待値は，

[傍注 1]　これは幾何分布の母関数である．

$$\mathrm{Exp}[n_j] = g_j'(1) = \frac{1}{\exp(e_j + \mu) - 1} \tag{6.11}$$

で与えられることが分かる．

束縛条件 (6.3) を外すということは，(6.3) における総粒子数 n を固定せず浮動化して，n を確率変数と見なすことを意味する．このとき，n の確率母関数 $g(x)$ は，$\tilde{Z}(\mu)$ を用いて，

$$g(e^{-t}) = \frac{\tilde{Z}(\mu+t)}{\tilde{Z}(\mu)}$$

と表せるので，前回示した定理 5.1，または前回の傍注 11 より，

$$\mathrm{Exp}[n] = -\frac{d}{d\mu}\log\tilde{Z}(\mu) = \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\exp(e_j+\mu)-1}, \tag{6.12}$$

$$\mathrm{Var}[n] = \frac{d^2}{d\mu^2}\log\tilde{Z}(\mu) = \sum_{j=1}^{r}\frac{\exp(e_j+\mu)}{(\exp(e_j+\mu)-1)^2} \tag{6.13}$$

が得られる．

6.2 無限体積極限

それでは，上記のモデルの無限体積極限 $r\to\infty$ を調べよう．前回と同様に，箱の固有エネルギーを

$$e_k = h\left(\frac{k}{r}\right), \quad k=1,2,3,\cdots,r \tag{6.14}$$

とする．ただし $h(x)$ は $[0,1]$ で定義され，0 または正の値を取り，単調で連続な関数である．

すると，(6.12), (6.13) により，

$$\mathrm{Exp}\left[\frac{n}{r}\right] = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\exp(e_k+\mu)-1} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1\frac{dx}{\exp(h(x)+\mu)-1},$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{n}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\mathrm{Var}[n] \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

したがって，r が大きいとき，$\frac{n}{r}$ は

$$\lambda = \int_0^1\frac{dx}{\exp(h(x)+\mu)-1} \tag{6.15}$$

で与えられる値 λ の近辺に限りなく集中することが分かる．そして，関数 $h(x)$ の値域の中に E を取れば，固有エネルギー E をもつ箱に入る粒子の数 n_E の確率母関数は，(6.10) から，

$$g_E(x) = \frac{1-\exp\left(-(E+\mu)\right)}{1-x\exp\left(-(E+\mu)\right)} \tag{6.16}$$

となる．

さてここで，$\lambda>0$ をあらかじめ定め，(6.15) が成り立つように μ を選ぶことを考える．(6.15) の λ は $\mu\to\infty$ のとき $\lambda\to 0$ となるから，もしも

$$\int_0^1\frac{dx}{\exp(h(x))-1} = \infty \tag{6.17}$$

ならば，任意の $\lambda > 0$ に対して $\mu > 0$ を選ぶことができる．例えば，c を正の定数として $h(x) = cx$ とすれば，正の定数 a が存在して，

$$e^{cx} \le 1 + ax\,, \quad 0 \le x \le 1$$

となるから，(6.17) が成り立つ．このような場合，(6.15) を満たすように μ を選べば，$\frac{n}{r}$ は λ の近辺に限りなく集中する．したがってこのモデルは，(6.1)–(6.4) で定義される本来のモデルにおいて，条件 $\frac{n}{r} \to \lambda$ の下で無限体積極限 $n, r \to \infty$ を取ったものと一致すると考えられる[傍注2]．

[傍注2]　興味ある読者は証明を考えてみるとよい．

しかし，$h(x)$ の設定の仕方によっては，条件 (6.17) が成立しないこともある．例えば，c, γ を $c > 0, 0 < \gamma < 1$ なる定数として，

$$h(x) = cx^{\gamma} \tag{6.18}$$

と置くと，

$$\exp(h(x)) - 1 \ge h(x) = cx^{\gamma}\,, \quad 0 < x < 1$$

であるから，(6.17) の積分は収束する．そこで，

$$\lambda_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\exp(h(x)) - 1} \tag{6.19}$$

と置くと，$\lambda \ge \lambda_0$ なる λ に対して，(6.15) を満たすような $\mu > 0$ は存在しないことになる．

(6.18) のような設定は一見恣意的なようだが，理想気体を量子力学的に考察すると，この設定が適切であることが分かっている[傍注3]．このような場合，$\lambda \ge \lambda_0$ なる系における粒子たちはどのような振舞いを見せるのだろうか．

[傍注3]　d 次元空間の理想気体では，$\gamma = \frac{2}{d}$ となる．特に 3 次元空間においては，条件 (6.17) は成立しない．また，$r \to \infty$ とする極限は，理想気体を封じ込めた容器の体積を限りなく大きくする極限を取ることに相当する．

粒子はエネルギー的には低い固有エネルギーをもつ箱に入りたがるが，確率的な効果により様々な箱に分散する．ところが固有エネルギーの設定 (6.18) では低エネルギーの箱が少ないため，粒子の密度がある限界を超えると，確率的に十分分散できなくなり，最低エネルギーの箱に膨大な数の粒子がたまるという現象が起きる．これを**ボーズ–アインシュタイン凝縮**と言う[傍注4]．これは識別可能な粒子系では見られない現象である．

[傍注4]　1924 年アインシュタインによって理論的に予言されたが[1]，実験的に検証されたのは 1995 年のことである[2]．

6.3 凝縮相

$\lambda > \lambda_0$ なる系の振舞いを調べよう．便宜的に若干記号を変える．n 個の粒子を $r+1$ 個の箱 $B_0, B_1, \cdots, B_r$ に入れるとし，箱 B_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, r)$ に入る粒子の数がそれぞれ n_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, r)$ である確率は，

$$p(n_0, n_1, \cdots, n_r) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{k=0}^{r} n_k e_k \right) \tag{6.20}$$

であるとする．ただし n_k は

$$n_k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.21}$$

$$\sum_{k=0}^{r} n_k = n \tag{6.22}$$

を満たす範囲で動き，Z は上記の範囲における $(n_0, n_1, \cdots, n_r)$ の和

$$Z = \sum_{(n_0, n_1, \cdots, n_r)} \exp\left(-\sum_{k=0}^{r} n_k e_k\right) \tag{6.23}$$

で与えられる定数である．ここで，(6.5) のように，固有エネルギー e_k を μ だけ平行移動しても確率モデルとしては変わりがないことに注意し，初めから $e_0 = 0$ が成り立っているとしよう．さらに，$[0,1]$ で定義され，単調で連続な関数 $h(x)$ を用いて，固有エネルギーを

$$e_k = h\left(\frac{k}{r}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, r \tag{6.24}$$

のように設定する．ただし $h(x)$ は，$c > 0$, $0 < \gamma < 1$ なる定数 c, γ により

$$cx^{\gamma} \leq h(x) , \quad x \in [0, 1] \tag{6.25}$$

のように評価されるとする[傍注5]．そして，

$$\lambda_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\exp(h(x)) - 1} \tag{6.26}$$

と置き[傍注6]，

$$\lambda_0 < \lambda \tag{6.27}$$

を満たす定数 λ を固定する．このモデルにおいて，

$$\frac{n}{r+1} \to \lambda \tag{6.28}$$

が成り立つように n, r を限りなく大きくしたとき，$\frac{n_0}{r+1}$ の確率分布を調べ，最低エネルギー状態への凝縮が起きることを示そう．

そのために，束縛条件 (6.22) の下で，n_0 は $n_1, n_2, \cdots, n_r$ から定まること，および $e_0 = 0$ であることに注意して，(6.20), (6.23) を次のように書く．

$$p(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right), \quad (n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathcal{N}_{n,r}, \tag{6.29}$$

$$Z = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathcal{N}_{n,r}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right). \tag{6.30}$$

ただし，

$$\mathcal{N}_{n,r} = \left\{ (n_1, n_2 \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} n_k \leq n \right\}$$

である．

ここで制約

[傍注5] この評価は，仮定 $h(0) = e_0 = 0$ と矛盾しない．

[傍注6] 条件 (6.25) の下で $\lambda_0 < \infty$ となる．

$$\sum_{k=1}^{r} n_k \leq n \tag{6.31}$$

を外したモデルを考える．すなわち，

$$p'(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \frac{1}{Z'} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right), \quad (n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r, \tag{6.32}$$

$$Z' = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r} \exp\left(-\sum_{k=1}^{r} n_k e_k\right) \tag{6.33}$$

と置き，(6.32) の意味での確率を $\mathrm{Prob}'[\cdot]$，期待値を $\mathrm{Exp}'[\cdot]$，分散を $\mathrm{Var}'[\cdot]$ と書くことにする．さて確率変数 n_+ を

$$n_+ = \sum_{k=1}^{r} n_k \tag{6.34}$$

で定義すると，(6.32) の意味での n_+ の平均と分散は，(6.12), (6.13) と同様に計算できて（$\mu = 0$ とすればよい），

$$\mathrm{Exp}'[n_+] = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{e^{e_j} - 1}, \tag{6.35}$$

$$\mathrm{Var}'[n_+] = \sum_{j=1}^{r} \frac{e^{e_j}}{(e^{e_j} - 1)^2} \tag{6.36}$$

となる．すると，(6.24), (6.26) から，$\frac{n_+}{r+1}$ の平均 μ_+ について，

$$\mu_+ = \mathrm{Exp}'\left[\frac{n_+}{r+1}\right] = \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{e^{e_j} - 1} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \lambda_0 \tag{6.37}$$

が成り立つことが分かる．また，$\frac{n_+}{r+1}$ の分散 σ_+^2 については，

$$\begin{aligned} \sigma_+^2 = \mathrm{Var}'\left[\frac{n_+}{r+1}\right] &= \frac{1}{(r+1)^2} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{4 \sinh^2 \frac{e_j}{2}} \\ &\leq \frac{1}{4(r+1)^2 \sinh^2 \frac{h(1/r)}{2}} + \frac{1}{r+1} \int_{1/r}^{1} \frac{dx}{4 \sinh^2 \frac{h(x)}{2}} \\ &\leq \frac{r^{2\gamma}}{(r+1)^2 c^2} + \frac{1}{r+1} \int_{1/r}^{1} \frac{dx}{4 c^2 x^{2\gamma}} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{6.38}$$

となり，r を限りなく大きくすると，$\frac{n_+}{r+1}$ は，(6.32) の意味で，λ_0 近辺に集中することが分かる．したがって，(6.31) は自動的に成立することになり，(6.29) と (6.32) の違いは無視できると考えられるのだが，このことをきちんと確かめてみよう．

一つ準備をする．

$$\frac{Z}{Z'} = \mathrm{Prob}'[n_+ \leq n]$$

であるから，

$$1-\frac{Z}{Z'}=\mathrm{Prob}'[n_+>n]=\mathrm{Prob}'\left[\frac{n_+}{r+1}-\mu_+>\frac{n}{r+1}-\mu_+\right]$$
$$\leq \mathrm{Prob}'\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\mu_+\right|>\frac{n}{r+1}-\mu_+\right]\leq\frac{\sigma_+^2}{(\frac{n}{r+1}-\mu_+)^2}$$

が成り立つ．最後の不等号はチェビシェフの不等式（連載 3 回目，定理 3.3）による．そして (6.28), (6.37), (6.38) を用いると，

$$1-\frac{Z}{Z'}\underset{n,r\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{6.39}$$

が得られる．

以上の準備の下で，本来のモデルである (6.29) の意味で，$\frac{n_+}{r+1}$ が λ_0 に集中することを示そう．(6.29) の意味での確率を $\mathrm{Prob}[\cdot]$ と書くと，$\lambda_0+\epsilon<\lambda$ なる任意の定数 $\epsilon>0$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\lambda_0\right|\leq\epsilon\right]&=\frac{Z'}{Z}\mathrm{Prob}'\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\lambda_0\right|\leq\epsilon \text{ かつ } n_+\leq n\right]\\&=\frac{Z'}{Z}\mathrm{Prob}'\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\lambda_0\right|\leq\epsilon\right]\end{aligned} \tag{6.40}$$

のように表される．ここで，もう一度チェビシェフの不等式を用いると，

$$\mathrm{Prob}'\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\lambda_0\right|>\epsilon\right]\leq\mathrm{Prob}'\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\mu_+\right|>\epsilon-|\lambda_0-\mu_+|\right]$$
$$\leq\frac{\sigma_+^2}{(\epsilon-|\lambda_0-\mu_+|)^2}\underset{n,r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

となる．したがって，(6.39) を考慮すれば，(6.40) から，

$$\mathrm{Prob}\left[\left|\frac{n_+}{r+1}-\lambda_0\right|\leq\epsilon\right]\underset{n,r\to\infty}{\longrightarrow}1$$

が得られる．$\epsilon>0$ はいくらでも小さく取ることができるから，$n,r\to\infty$ の極限で，$\frac{n_+}{r+1}$ は λ_0 に集中すると言える．

上記の結果を言い換えれば，確率変数 $\frac{n_0}{r+1}$ の値は，$n,r\to\infty$ の極限で $\lambda-\lambda_0$ に集中することになり，最低エネルギー状態におびただしい数の粒子がたまることが分かる．直観的に言えば，最低エネルギー以外の状態に確率的に分散できる粒子数は $\lambda_0 r$ 程度であり，いわば容量制限があるので，$\lambda_0 r$ より多くの粒子を入れようとすると，あふれた粒子が最低エネルギー状態にたまってしまうと考えられる．

参考文献

1) Einstein, A., Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Preussische Akademie der Wissenschaften, *Phys.–math. Klasse, Sitzungsberichte*, (1924) p.261–267.
2) Anderson, M.H., Ensher, J.R., Matthews, M.R., Wieman, C.E., Cornell, E.A., Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science*, vol.**269**, no.5221 (1995), p.198–201.

（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）

2006年 (1月号~12月号) 総目次

Vol. 44, No. 511~Vol. 44, No. 522

特　集（2007年2月号予告）

ランダム行列の広がり

その多彩な応用

本体 952 円

ランダム行列百花繚乱	永尾　太郎
数論とランダム行列理論	名越　弘文
成長するネットワークとランダム行列	尾畑　伸明
ランダム行列と可積分系	筧　三郎
ゲージ場の量子論	西垣　真祐
物性物理におけるランダム行列の広がり	谷口　伸彦
経済物理とランダム行列	相馬亘・藤原義久・尹熙元
無線通信におけるランダム行列	田中　利幸
生態学	時田恵一郎
《名著に親しむ》	香取　眞理

特　集（2006年12月号）

素粒子像の探究

統一への地平をたどる

本体 952 円

現代の素粒子像　湯川・朝永から弦理論まで	米谷　民明
量子力学における素粒子像　ボゾンとフェルミオン	大貫　義郎
中間子の予言　湯川秀樹生誕百年	九後汰一郎
クォークは誰が見たか	小平　治郎
ニュートリノは宇宙の果てまで	谷本　盛光
ヒッグスの謎	林　青司
超対称理論における素粒子像　スーパー粒子	岡田　安弘
モノポールを求めて	荒船　次郎
アクシオンは存在するか	山口　昌弘
《名著に親しむ》『旅人』と『鏡のなかの世界』	米谷　民明
《ネットワーク科学最前線》　第3回	郡　宏
《連載》　重力理論入門　その8	前田　恵一
使うための確率論入門　その5	渡辺　浩
伊藤清先生ガウス賞受賞に寄せて	高橋陽一郎

編集後記

本号からまた新しい年を迎えました．本年もご愛読よろしくお願い致します．

今回のテーマは新年にふさわしく，物理と数学の福笑いならぬヤング図形です．このことは巻頭の氷上先生がうまく譬えて解説して下さっています．偶然の発見や幸運に出会う能力のことをセレンディピティと言いますが，身の回りの出来事をどう捉えるかは私たちのイメージ力次第と言えます．今年も，本誌が良い意味で完成された福笑いになることを願いつつ，担当者の抱負と致します．（伊崎）

＊　　＊

ヤング図形で遊べましたでしょうか？今回の特集は，数学から物理と幅広く，また，ヤング図形も方々で遊んでいて，まさに，目を皿にするような内容になっていたかと思います．きっとヤング図形，ひいては，数学と物理に対するイメージが構築できたのではないでしょうか？

2006年もあと少しで終わってしまいますが，2007年も読者の目を皿にするような特集を作っていきたいと思いますので，よろしくお願いします．（大溝）

数　理　科　学　1月号

2007年1月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ

(The Library for Senior & Graduate Courses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．

装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

表示価格はすべて税抜きです

1	**カオスと量子物理学**		
	中村勝弘著	本体 1857 円	
3	**シュレーディンガー方程式**		
	仲滋文著	本体 1790 円	
5	**有限体と符号理論**		
	内田興二著	本体 1667 円	
8	**差分方程式講義**		
	広田良吾著	本体 1857 円	
9	**生命をつくる**		
	中野馨著	本体 1524 円	
10	**計算物理入門**		
	上田顕著	本体 1381 円	
11	**エコノミックゲームセオリー**		
	船木由喜彦著	本体 1429 円	
12	**演習 場の量子論**		
	柏太郎著	本体 1886 円	
16	**有限要素法による構造解析事例集**		
	白鳥正樹・三好俊郎編著	本体 1429 円	
18	**独立成分分析**		
	甘利俊一・村田昇共編著	本体 1667 円	
20	**物理数学ノート**		
	佐藤光著	本体 1819 円	
21	**数学の未解決問題**		
	上野・高橋・中島共編	本体 1886 円	
23	**微分幾何講義**		
	二木昭人著	本体 1857 円	
24	**脳の謎に挑む**		
	茂木健一郎編著	本体 1829 円	
26	**脳型コンピュータの実現に向けて**		
	甘利俊一編著	本体 1857 円	
27	**ガロア理論**		
	中野伸著	本体 1790 円	
28	**量子可積分系入門**		
	白石潤一著	本体 1876 円	
29	**伝えるための理工系英語**		
	宮野健次郎著	本体 1429 円	
30	**応用のための関数解析**		
	吉田善章著	本体 1800 円	
31	**分子コンピュータの現状と展望**		
	萩谷昌己編著	本体 1524 円	
32	**量子情報理論入門**		
	林正人著	本体 1886 円	
33	**工学のための非線形解析入門**		
	藪野浩司著	本体 1857 円	
34	**経済における確率的モデルへの招待**		
	青木正直著／青山・藤原監訳	本体 1886 円	
35	**賭けの数理と金融工学**		
	竹内啓著	本体 1429 円	
36	**応用のための確率論・確率過程**		
	松本裕行著	本体 1876 円	
37	**情報理論の基礎**		
	村田昇著	本体 1619 円	
38	**複素ニューラルネットワーク**		
	廣瀬明著	本体 1695 円	
39	**マクスウェル方程式**		
	北野正雄著	本体 1876 円	
40	**制御理論講義**		
	木村英紀著	本体 1886 円	
41	**バイオインフォマティクスの基礎**		
	冨田勝監修・斎藤輪太郎著	本体 1857 円	
42	**トポロジー入門**		
	田中利史・村上斉共著	本体 1886 円	
43	**アルゴリズムと計算量**		
	谷聖一著	本体 1857 円	
44	**ゲーム理論のフロンティア**		
	池上高志・松田裕之共編著	本体 1829 円	
45	**ゲージ場の量子論入門**		
	近藤慶一著	本体 1886 円	
46	**現代物理のための解析力学**		
	早田次郎著	本体 1857 円	
47	**現代物理数学への招待**		
	鈴木淳史著	本体 1876 円	
48	**例題形式で学ぶ現代素粒子物理学**		
	川村嘉春著	本体 1886 円	
49	**ソリトンと物理学**		
	戸田盛和著	本体 1876 円	
50	**確率的情報処理と統計力学**		
	田中和之編著	本体 1857 円	
51	**超対称性理論**		
	太田信義・坂井典佑共著	本体 1819 円	

数学テキスト好評書より(2)

数理系のための
基礎と応用 微分積分I, II
金子晃著／A5／Ｉ：256頁／本体1800円
Ⅱ：280頁／本体1950円
レポートやプログラム，期末試験の問題と解答・講評などを盛り込んだ親しみやすいテキスト．

要説 わかりやすい微分積分
小川卓克著／A5／176頁／本体1600円
微分積分学を短時間で学ぶことを意図して書かれており，理論体系と推論の道筋は大方の教科書と変りなく，急いで概要を知りたい状況にも最適の好書．

改訂 微分積分
洲之内治男・和田淳蔵共著／A5／232頁／本体1280円
高校における数学教育を考慮し，例題等を厳選し，直観的理解を重視した改訂版．前著同様に１年間の講義用テキストとして章だてされている．

理工系のための
基礎と応用 微分積分
計算を中心に
山本昌宏著／A5／288頁／本体1850円
理工系の基礎として要求される微積分学の計算技術習得を目指している．

微分積分概説
長瀬・芦野共著／A5／256頁／本体1750円
まず概説的な形で微分積分の基本的な事柄を述べ，その後あらためて数学的に厳密に考えてみるよう章の配置を考慮した．２色刷．

入門微分積分
水田義弘著／A5／200頁／本体1700円
高校数学とのつながりに配慮し，証明の基本的なアイデアを読みとれるよう工夫．微分方程式や偏微分方程式についても解説．２色刷．

微分積分概論
越昭三監修／高橋・加藤共著／A5／224頁／本体1700円
豊富な例題や章末問題等は，実力の涵養に最適．偏微分法や重積分法まで十分にカバーした理工系の学生にとって格好の教科・参考書．

理工基礎 微分積分学I, II
I: 1変数の微積分　II: 多変数の微積分
足立恒雄著／A5／ I: 184頁／本体1600円
II: 192頁／本体1600円
1変数，および多変数の微分積分について基礎から丁寧にわかりやすく解説．

微分積分の基礎
寺田・中村共著／A5／208頁／本体1480円
高等学校の「数学Ⅱ」までの知識で学ぶことができる．例や図を多用したわかりやすい解説．見開き体裁・２色刷．

大学で学ぶ
微分積分
沢田・渡辺・安原共著／A5／120頁／本体1000円
入門者が微分積分の世界に入りやすいように配慮し，基本的な定理・例題を扱った，テキスト・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学テキスト好評書より(1)

Essential物理学

阿部龍蔵著／A5／224頁／本体1700円
大学初学年級の学生が十分読み下せるよう図や問題を数多く掲載し，見開きに整理された好個の教科・参考書である．

力学[新訂版]

阿部龍蔵著／A5／240頁／本体1600円
長年好評を得てきたテキストの新訂版．解析力学の説明を補足し充実させた．またシミュレーションプログラムをのせて．理解向上をはかった．

物理学入門

宮下精二著／B5／272頁／本体1850円
長さ，時間など物理学に必要な単位を用いた自然の表し方からはじめ，質点の運動，連続体，電磁気学，光学まで，物理学の基礎的な法則を説明する．

新・基礎 力学

永田一清編／A5／224頁／本体1800円
本書は力学の重要な項目を精選し，可能な限り丁寧に説明されたテキストである．また，章末の例題と演習問題により，手を動かして理解していけるように工夫されている．

物理学[新訂版]

阿部・川村・佐々田共著／A5／320頁／本体1750円
長い間好評を得てきた「物理学」の新訂版．より現代的に平易に記述されており，左頁に本文，右頁に図・表や細かい解説等を配した．２色刷．

新・演習 力学

阿部龍蔵著／A5／192頁／本体1850円
本書はテキスト「力学［新訂版］」の対となる理工系向け演習書である．数式を楽に追えるなど，初学者にも十分理解できるよう工夫した．

新・演習 物理学

阿部龍蔵・川村清・佐々田博之 共著
A5／288頁／本体2000円
テキスト「物理学［新訂版］」の対となる理工系向け演習書．

基礎物理学演習I,II

永田一清編／Ｉ巻：A5／384頁／本体2400円
Ⅱ巻：A5／328頁／本体2400円
物理学の基礎的事項の総合的かつ速やかな理解に重点をおいた演習書．便宜をはかり頁単位で収録．

物理数学の基礎

香取眞理・中野徹共著／B5／160頁／本体1900円
理工系の学部１年生を対象として，物理学や理工系の専門科目を学ぶために必要な数学をわかりやすく解説した．２色刷．

新版 物理数学ノート

基礎物理をよりよく理解するために
佐藤光著／A5／224頁／本体1900円
前著に新たな項目を加え，物理を学ぶために必要な数学を多数の例題・演習問題を取り上げながら講義ノート風にまとめたA5判教科・参考書である．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学テキスト好評書より(2)

新・基礎 電磁気学
佐野元昭著／A5／240頁／本体1800円
理工系大学初年級の学生を対象に，電磁気学の基礎理解を目的としたテキスト．丁寧な説明と見やすい体裁によってまとめられている．2色刷．

電磁気学入門
阿部龍蔵著／A5／256頁／本体1700円
電流の話から説き起こし，電磁気学のひととおりを解説した入門書．電磁気現象の視覚化としてのシミュレーションプログラム例を付録に収録．

電磁気学演習 [新訂版]
山村泰道・北川盈雄共著／A5／264頁／本体1850円
新訂にあたっては図を見やすくし，付録には数学諸公式や表を追加．頁単位で構成した使いやすく，よく分かる演習書．

新・演習 電磁気学
阿部龍蔵著／A5／208頁／本体1850円
テキスト「電磁気学入門」の対となる理工系向け演習書．深い理解と真の応用力が涵養できるよう工夫されている．

熱・統計力学入門
阿部龍蔵著／A5／176頁／本体1700円
本書は高校物理程度の知識でわかるよう熱の性質を扱っている．斯学の基本事項を読みやすい形でまとめた恰好の教科・参考書である．

新版 量子論の基礎
その本質のやさしい理解のために
清水明著／A5／288頁／本体2000円
臨時別冊・数理科学SGCライブラリの一巻として刊行された好著「量子論の基礎」の単行本化．時代の要請に応えた，必携のテキスト．

新・演習 熱・統計力学
阿部龍蔵著／A5／184頁／本体1800円
本書は「熱・統計力学入門」に準拠した演習書である．基本事項をコンパクトにまとめ，洗練された例題・問題と詳しい解答で深い理解と真の応用力がつくよう工夫されている．

量子力学講義
小川哲生著／B5／264頁／本体2450円
講義の臨場感を失わないよう記述し，本書1冊で量子力学の考え方に慣れ，枠組みを理解出来るよう配慮した．有限自由度の量子力学，特に1粒子系の問題を主に扱った，初学者対象の教科・参考書．

新・基礎 波動・光・熱学
永田一清・松原郁哉共著／A5／232頁／本体1800円
本書は斯学の基礎からわかりやすく丁寧に解説した教科・参考書．見やすい体裁と章末にまとめた例題・演習問題により，さらなる理解を深める．

新・演習 量子力学
阿部龍蔵著／A5／192頁／本体1800円
初めて量子力学を学ぶ理工系学生向けの演習書．基本事項をコンパクトにまとめ，精選された例題・問題と詳しい解答で深い理解と真の応用力が涵養できるよう工夫されている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

化学テキストより

日常の化学
―地球環境と生活様式の変革のために―
渡辺啓著／A5／224頁／本体1600円
大学・短大の初年級向で，化学と縁の薄い読者にも馴染みやすいテキスト．2色刷．

現代化学の基礎
物質科学へのアプローチ
渡辺啓著／A5／256頁／本体1800円
理工系学部等の基礎課程用テキストとして，のちの専門に関係するような題材を中心に要説した．

基礎 有機化学
大須賀篤弘・東田卓共著／A5／208頁／本体1850円
代表的な有機化合物に沿って，合成法，性質，関連の重要な概念を丁寧に解説．有機化学全般をコンパクトにまとめてあり，初学者がその大枠を理解するには好適のテキスト．

工学のための 有機化学
荒井貞夫著／A5／256頁／本体1800円
現在1200万以上の種類があり，年間10万の新しい種類が作りだされている有機化合物について，工科を専攻とする読者が学習するための教科書．

基礎 無機化学
花田禎一著／A5／232頁／本体1950円
大学ではじめて無機化学を学ぶ学生のために基礎を分かり易くまとめ，見開きに整理した好個の教科・参考書．

工学のための 無機化学
山下・片山・大倉・橋本共著／A5／216頁／本体1850円
工学分野に使われる内容の習得を目標にした教科書．基礎化学から多成分系化合物，無機材料までを分かりやすく解説．2色刷・見開き体裁．

工学のための 無機材料科学
セラミックスを中心に
片山・大倉・橋本・山下共著／A5／232頁／本体2100円
本書一冊で無機材料科学に関する基本から応用までを初学者向きに簡潔に解説した．

化学熱力学［新訂版］
渡辺啓著／A5／192頁／本体1650円
理工系の大学初年級，短大，高専，各種学校等の学生を対象に長年好評を博してきた「化学熱力学」の新訂版．

工学のための分析化学
長島珍男著／A5／256頁／本体1900円
大学で化学を専攻する学部学生及び大学院生を対象とした分析化学の入門書．初学者にとって難解と思われる部分や数式的な表現を避け，わかりやすくまとめた好個の教科・参考書．

基礎 物理化学
I：原子・分子の量子論／216頁
II：物質のエネルギー論／224頁
山内淳著／A5／本体各1900円
大学初学年級の学生を対象に物理化学の基礎を分かり易くまとめた．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

工学テキストより

機構学
森田鈞著／A5／160頁／本体1600円
機械は，抵抗力のある物体の組合せであり，その各部が行う限定された相対運動について学ぶのが機構学である．多数の図面を用いて丁寧に解説．

工業熱力学の基礎
斎藤孟著／A5／264頁／本体2200円
工科系の高専・大学で熱力学を学ぼうとする学生向けに，高校の理科の知識と簡単な微積分の計算がわかれば理解できるよう配慮されたテキスト．

機械工学のための 振動・音響学
鈴木・西田・丸山・渡辺共著／A5／256頁／本体2300円
大学の機械工学系の3～4年生，工業高専の最上級生を対象とし，振動学・音響工学の基礎をしっかりと習熟できることに主眼をおいたテキスト．

機械力学入門
辻岡康著／A5／192頁／本体1600円
機械力学とは機械に関する動力学の問題を扱う学問である．この入門書では，線形系の振動から始め，回転機械・往復機械の動力学までを解説する．

演習 材料力学［新訂版］
尾田十八・三好俊郎共著／A5／224頁／本体1980円
長い間好評を得てきた「演習材料力学」を現在の事情を考慮し，単位系はSIを中心とした解説に改め，解答もより明快にした．２色刷．

演習図学と製図
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／34頁／本体880円
工業高専，短大，大学における技術基礎教育に対応して作成された図学の練習帳．ページの切りはなしを簡単にし，作図・提出の便宜を図っている．

工学基礎図学と製図［新訂版］
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／208頁／本体1480円
広く講義で使われてきた「工学基礎図学と製図」の新訂版．AutoCADの利用も配慮し，さらに２色刷とするなどより現代的に改訂した．

演習機械振動学
佐藤・岡部・岩田共著／A5／200頁／本体1800円
機械力学，特に振動を中心としたダイナミックスについての基礎学力をつけるための演習書．質点及び剛体の力学の基礎からはじめている．

演習 機械運動学
高野政晴・遠山茂樹共著／A5／248頁／本体2524円
ロボットの機構など，時代の要請にも即した新鮮な内容をもり込み，豊富な図で解説した演習書．要項・例題を頁単位で配し，学習の便宜をはかる．

演習振動・波動論
徳岡・杉山・松本共著／A5／216頁／本体2233円
工学の諸分野で基礎となる振動現象と波動現象の本質と解析方法が頁単位の演習書形式で総合的に学べるよう配慮された好個の書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(2)

ハードウェア入門

柴山潔著／A5／160頁／本体1400円

現代のコンピュータシステムの主要なハードウェア機構を構成するプロセッサ，メインメモリ，及び周辺装置の各機能やそれらの分担方式について明らかにする．

改訂 FORTRAN77

大駒誠一著／A5／280頁／本体1700円

例題ごとにいくつかのプログラムを提示し解説を施すというスタイルで，短期間に一定のレベルに達したいという初学者に最適．好評書の改訂版．

ザ・FORTRAN77

戸川隼人著／A5／152頁／本体1408円

計算機科学の教育に経験豊かな著者が，すぐに使えるFORTRANのプログラミングの方法を解説．わかりやすさを重視して書かれている．２色刷．

Fortran 77プログラミング

原田賢一著／A5／324頁／本体1650円

実践的な例題を豊富に使用して，アルゴリズムや計算手順など考え方を丁寧に説明．流れ図やプログラム，重要なポイントは２色刷の見やすい構成．

ザ・Fortran90/95

戸川隼人著／A5／216頁／本体1750円

数値計算に適した言語として広く使われているFortranの最新仕様に即した入門書．本書では新しい要素を十分に活かし，入門者ができるだけ短時間で理解できるように書かれている．２色刷．

演習と応用FORTRAN 77

戸川隼人著／A5／248頁／本体1806円

実際に書いて「体で覚える」ように応用に重点をおいた演習書．例題を通して数値計算・統計解析・事務処理などの概要を理解することができる．

COBOLの基礎と応用

JIS1992年版準拠

大駒誠一著／A5／216頁／本体1450円

初心者がCOBOLのプログラムを書けるようになることを目標に，実践に即し整理された入門書．

ザ・PASCAL

戸川隼人著／A5／196頁／本体1700円

プログラミング言語教育にとって最近とみにその重要性が指摘されるPascalの要所をあます所なく解説する．例題は有限要素法まで扱う．２色刷．

Pascalプログラミングの基礎

真野芳久著／A5／280頁／本体1900円

プログラミングの初心者を対象に，例題を通した説明を行った．誤りないプログラミングのための知識，手法，プログラムの構成法なども紹介．

Pascal 入門

古郡廷治著／A5／240頁／本体2300円

人文系・理工系という垣根を取り払って，幅広い分野の読者層を対象とし，わかりやすくPascalプログラミングの「作法」を伝えた入門書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(3)

やさしく学べる
C言語入門
基礎から数値計算入門まで
皆本晃弥著／B5／240頁／本体2400円
各章の頁数，内容の取捨選択，演習問題等，大学や高専での講義に利用しやすい構成となっている．

演習と応用C
玉井浩著／A5／192頁／本体1700円
C言語の初心者から，文法を一通り学んだ読者までを対象に，主としてプログラムを作る問題を精選した．C言語はANSI仕様に準拠．

C言語のススメ
Cで始めるプログラミング
清水忠昭・菅田一博共著／B5／336頁／本体2300円
Cプログラミングの基本的考え方や文法の意味を丁寧に解説．初歩でつまずいている人におすすめ．

ザ・C [第2版]
――ANSI C準拠――
戸川隼人著／A5／272頁／本体1750円
C言語を学ぼうとする人の立場にたって，他のプログラミング言語をまったく知らなくても十分C言語が理解できるよう特に基礎的な部分を充実させた．

Cプログラミングの基礎
蓑原隆著／A5／192頁／本体1600円
見開き体裁で，学習しやすく工夫されており，広くおすすめできる教科・参考書．

実習Visual C++.NET
だれでもわかるプログラミング
児玉靖司・小川久夫・入戸野健共著
B5／208頁／本体2100円
Cプログラミングにおいてビジュアルな部分を中心とし，コンソールプログラミング，さらに，C++プログラミングについても学べる．

オペレーティングシステム概説
その概念と構造
谷口秀夫著／A5／160頁／本体1450円
主にOSの「概念」を解説しながら,「構造」についても紹介し，単なる細かな操作や機能の知識ではなく相互の関連を解説した．

オペレーティングシステムの基礎
大久保英嗣著／A5／184頁／本体1600円
多様なオペレーティングシステムに共通する基本的な概念や技法に重点をおいて説明．

Linux/FreeBSD/Solarisで学ぶ
UNIX
基本操作からフリーソフトのコンパイル/インストールまで
皆本晃弥著／B5／224頁／本体2300円
これからUNIXを学ぼうとする人に最適の書．

ザ・Linux
戸川隼人 著／A5／168頁／本体1600円
第2のコンピュータリテラシとして書かれたLinuxのテキスト．GUI利用をするWindowsに近い操作と，伝統的なLinuxの操作法を併記した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(4)

Javaによる
プログラミング入門
権藤克彦著／A5／224頁／本体1850円
初めてプログラミングを学ぶ人のための入門書．言語はプログラミング言語として洗練されているJavaを選択．見開き体裁で読みやすい構成．

演習と応用 Java
戸川隼人著／A5／232頁／本体1900円
プログラミング言語初心者も念頭においた，アプレットの基本的な書きかたを短期間で学べる演習中心のテキスト．GUIや画像，音声まで，ひととおりの機能が約4ヶ月で学べる．

ザ・Visual Basic
戸川隼人著／A5／264頁／本体1850円
変数や関数，制御構造，ファイル入出力などのプログラミングの基本はもちろん，構造体，クラス，タイプなど高度な技術も解説．２色刷．

実習Visual Basic .NET
だれでもわかるプログラミング
林直嗣・室井勝子・鈴木三枝子共著
B5／200頁／本体1900円
着実に理解を深めるために豊富な例題，練習問題を用意した．2色刷．

CGとビジュアルコンピューティング入門
伊藤貴之著／A5／176頁＋口絵16頁／本体1950円
コンピュータによる画像処理・ＣＧ・可視化の各技術を入門者に親しみやすく読みやすいよう解説．

ネットワーク利用の基礎
[新訂版]
インターネットを理解するために
野口健一郎著／A5／216頁／本体1850円
技術の発展を反映した，見開き体裁で分かりやすく解説された好個の教科・参考書．

C言語による
数値計算入門
解法・アルゴリズム・プログラム
皆本晃弥著／B5／240頁／本体2400円
大学・短大・高専等における講義用，あるいは独習用の入門書．

数値解析入門 [増訂版]
山本哲朗著／A5／288頁／本体2000円
好評を得てきた「数値解析入門」の増訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げた．学生，技術者，研究者に好適な教科，参考書．

数値計算入門
河村哲也著／A5／176頁／本体1600円
本書は数値計算の基本となるものおよび頻繁に使われるものを選び，出来る限りやさしく解説．2色刷，各項目は見開き2頁構成．

数値シミュレーション入門
河村哲也著／A5／208頁／本体2000円
偏微分方程式によるシミュレーションを中心に，基礎から具体例までを出来るだけ平易に解説．卒業研究の例も多数紹介．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社